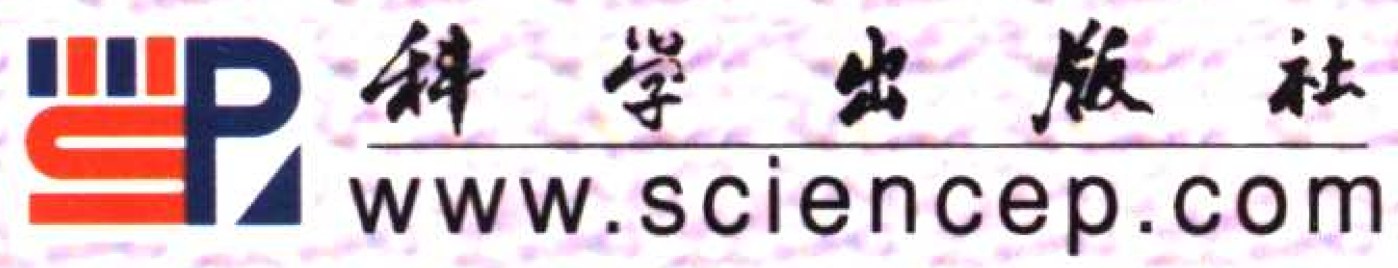
现代数学基础丛书

微分方程中的变分方法

（修订版）

● 陆文端 著





(O-1669.0101)

现代数学基础丛书

巴拿赫空间引论
近代调和分析方法及其应用
递归论
拓扑群引论
公理集合论导引
丢番图逼近引论
Banach代数
紧黎曼曲面引论
广义哈密顿系统理论及其应用
解析数论基础
数理统计引论
多元统计分析引论
概率论基础
微分动力系统原理
二阶椭圆型方程与椭圆型方程组
分析概率论
非线性发展方程
黎曼曲面
傅里叶积分算子理论及其应用
反应扩散方法引论
离散鞅及其应用
复合算子理论
微分方程定性理论
概率论基础和随机过程
复解析动力系统
模型论基础
环与代数
仿微分算子引论
实分析导论
对称性分岔理论基础
线性微分方程的非线性扰动
随机点过程及其应用
复变函数逼近论
线性整数规划的数学基础
组合矩阵论
算子代数
Banach空间中的非线性逼近理论
Gel'fond-Baker方法在丢番图方程中的应用
实用微分几何引论
半群的S-系理论
有限典型群子空间轨道生成的格
有限群导引（上册、下册）
随机模型的密度演化方法
非线性偏微分复方程
调和分析及其在偏微分方程中的应用
惯性流形与近似惯性流形
数学规划导论
拓扑空间中的反例
拓扑空间论
非经典数理逻辑与近似推理
光滑映射的奇点理论
非线性动力系统分析引论
微分方程中的变分方法

ISBN 7-03-010861-2



ISBN 7-03-010861-2
定 价：25.00 元

现代数学基础丛书

微分方程中的变分方法

（修订版）

陆文端　著

内 容 简 介

本书由两部分内容组成. 上篇讲述古典变分法的基本理论及解线性微分方程边值问题的重要变分方法,包括 Riesz 方法,Galerkin 方法及有限元素法. 下篇介绍近代变分法(主要介绍临界点理论中的极小极大原理及集中紧性原理)及其在拟线性椭圆方程边值问题解的存在理论中的应用,其中包括作者的研究成果.

本书可供大学数学系高年级本科生,理工科研究生及教师,科研人员及工程设计人员阅读.

图书在版编目(CIP)数据

微分方程中的变分方法(修订版)/陆文端著.—北京:科学出版社,2003

(现代数学基础丛书)

ISBN 7-03-010861-2

Ⅰ.微… Ⅱ.陆… Ⅲ.变分法 Ⅳ.O176

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 068840 号

责任编辑:毕 颖/责任校对:陈丽珠

责任印制:安春生/封面设计:槐寿明

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码:100717

http://www.sciencep.com

新蕾印刷厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2003年 2 月第 一 版 开本:850×1168 1/32

2003年 2 月第一次印刷 印张:12 5/8

印数:1-3 000 字数:328 000

定价:25.00 元

(如有印装质量问题,我社负责调换〈新欣〉)

《现代数学基础丛书》编委会

修订版序

本书 1995 出版后，作者将它作为数学系研究生课教材使用过两次. 本版除改正了初版中发现的一些疏漏和印刷错误外，还扩充了一些内容：在第一章和第八章增加了一些例子，在定理 8.1.2 中给出不可解问题的更一般结果. 变动最大的第四章增加了有限元素法刚度矩阵的构造及计算格式的形成以及一维有限元素法近似解的误差估计.

今年，在本版定稿之前，作者在温州师范学院数学系中青年教师研讨班上作过系统的报告. 限于作者水平，书中还会有疏漏和错误，恳请读者批评指正.

陆文端

2002 年 4 月于温州师范学院

第 一 版 序

微分方程中的变分方法是把微分方程边值问题化为变分问题以证明解的存在，解的个数及求近似解的方法.

微积分的创立是17世纪数学最伟大的成就. 17世纪后期，数学家们(他们也都是物理学家)在探讨用微积分解决更多的物理问题中发现了一些新的数学问题，如微分方程问题，变分问题等. 历史上第一个变分问题是由Newton提出并解决的. 他在巨著《自然哲学的数学原理》(1687年)中研究了在轴向以常速度运动而使运动阻力最小的旋转曲面必须具有的形状. Johann Bernoulli 1696年在《教师学报》上提出了著名的最速降线问题，引起了许多数学家的兴趣；Newton、Leibniz、Johann Bernoulli及他的哥哥James Bernoulli得到了正确的解答(旋轮线). 因此，Johann Bernoulli常被认为是变分法的发明者. 到了18世纪，Euler、Lagrange等人的工作，逐渐形成了一个解决数学物理问题的数学分支——变分法.

古典变分法的基本内容是确定泛函的极值及极值点. 在一定条件下，确定泛函的极值点与确定微分方程边值问题的解这两个问题可以互相转化. 也就是说，微分方程边值问题常常可以化为变分问题来研究. 因此，变分方法就成为研究微分方程边值问题的一种基本方法.

20世纪50年代以后，由于电子计算机的发展，基于变分方法发展起来的有限元素法，在物理、力学及工程技术中得到了广泛的应用，已经成为计算数学的一个重要分支学科.

近20多年来，近代变分方法(又称为大范围变分法)得到了重大的发展，并在解决拟线性椭圆方程边值问题中取得了许多有重要意义的新结果.

本书内容包括两个部分.

上篇讲述古典变分法的基本理论及解线性微分方程边值问题的重要变分方法，包括里斯法、伽辽金法以及有限元素法. 为了更广泛的读者阅读使用，只假定读者具有数学分析与线性代数的基本知识. 本书要用到的泛函分析方面的准备知识在第二章作了介绍.

下篇介绍近代变分法 (主要讲临界点理论中的极小极大原理及集中紧性原理) 及其在拟线性椭圆边值问题解的存在理论中的应用. 由于这一部分是近 20 多年的最新研究成果，不仅用到线性与非线性泛函分析，偏微分方程及拓扑学等学科的知识，而且还用到最近发表的论文中的一些结果. 因此在这一部分先用两章介绍有关索波列夫空间与非线性泛函分析方面的基本知识，并在附录 1 中列出书中要用到的一般测度与积分的知识，在附录 2 中给出 $C(\bar{\Omega})$ 及 $L^p(\Omega)$ 中列紧性定理的证明，附录 3 及附录 4 分别介绍有关 Banach 空间中有界集的弱紧性及度量空间的仿紧性. 为了使这些准备知识不占太长的篇幅，其中一些定理和结果略去了证明而只指出其参考文献.

上篇可以作为数学系本科生高年级选修课或理工科研究生课的教材，也可供理工科教师及科学工作者使用和参考. 全书可以作为数学系有关专业研究生课教材，也可供数学工作者参考.

本书是根据作者 1975 至 1992 年在四川大学数学系开设选修课及研究生课所编写的讲义和讲稿经过较大修改和补充写成的. 大部分内容曾在“第四届全国数学物理方法研讨会” (1990 年 7 月) 上作过报告. 由于本书是在大量文献资料中选编而成的，没有现成的书可资借鉴，一些证明又是作者给出的，因此疏漏和错误在所难免，真诚地欢迎读者批评指正.

目　录

上篇　古典变分理论与线性微分方程边值问题

下篇 近代变分理论与非线性椭圆方程边值问题

上篇　古典变分理论
与线性微分方程边值问题

第一章　变分问题与微分方程边值问题

本章介绍什么是变分问题，并证明在一定条件下，微分方程边值问题与相应的变分问题是等价的.

1.1　变 分 问 题

引起变分法这一分支学科产生的第一个著名变分问题是最速降线问题. 这个问题是约翰·伯努利 (Johann Bernoulli) 1696 年在《教师学报》上向当时的数学家公开提出的. 最速降线问题是：设 O 与 A 是高度不同且不在同一铅垂线上的两定点，如果没有摩擦和空气阻力，一质点在重力作用下从 O 点沿一曲线降落至 A 点，问曲线呈何种形状时，质点降落的时间最短？

设经过 O 与 A 的铅垂平面为 XOY, OX 为水平轴， OY 轴铅垂向下， A 点的坐标为 (a,b), 且 $b>0$. 质点从 O 开始运动，它的速度 v 与它的纵坐标有关系：

$$v^2 = 2gy, \tag{1.1.1}$$

其中 g 是重力加速度.

设质点降落曲线的方程为 $y=y(x)$, 则由 (1.1.1) 有

$$\frac{ds}{dt} = v = \sqrt{2gy},$$

由此得

$$dt = \frac{ds}{\sqrt{2gy}} = \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{2gy}}dx.$$

对此式积分，得出质点沿曲线 $y = y(x)$ 由 O 降落至 A 所需的时间为

$$t = t(y(x)) = \int_0^a \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{2gy}}dx. \tag{1.1.2}$$

这就说明，质点由 O 降落至 A 所需的时间 t 是函数 $y(x)$ 的函数，称 t 是函数 $y(x)$ 的泛函，最速降线问题就是在满足边界条件

$$y(0) = 0, \qquad y(a) = b \tag{1.1.3}$$

的所有连续函数 $y(x)$ 中求出一个函数使泛函 (1.1.2) 取最小值.

对泛函求极值的问题称为 **变分问题**，使泛函取极值的函数称为 **变分问题的解**，也称为 **极值函数** 或 **极值点**. 专门研究变分问题的学科称为 **变分法**.

为了求出最速降线问题的解，将 (1.1.2) 中的被积函数记为

$$F(y, y') = \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{2gy}}. \tag{1.1.4}$$

设 $y(x)$ 是最速降线问题的解，即 $y(x)$ 满足边界条件 (1.1.3) 且使

$$t(y(x)) = \int_0^a F(y, y')dx = \min. \tag{1.1.5}$$

对于满足边界条件

$$\varphi(0) = \varphi(a) = 0 \tag{1.1.6}$$

的任意连续函数 $\varphi(x)$ 及任意实数 ε，函数

$$y(x) + \varepsilon\varphi(x)$$

均满足边界条件 (1.1.3). 因此，泛函

$$t(y(x) + \varepsilon\varphi(x))$$

当 $\varepsilon=0$ 时取最小值 $t(y(x))$, 从而有

$$\frac{d}{d\varepsilon}t(y(x)+\varepsilon\varphi(x))|_{\varepsilon=0}=0. \tag{1.1.7}$$

由 (1.1.5) 及分部积分得出

$$\frac{d}{d\varepsilon}t(y(x)+\varepsilon\varphi(x))=\frac{d}{d\varepsilon}\int_0^a F(y+\varepsilon\varphi,y'+\varepsilon\varphi')dx$$

$$=\int_0^a [F_y(y+\varepsilon\varphi,y'+\varepsilon\varphi')\varphi+F_{y'}(y+\varepsilon\varphi,y'+\varepsilon\varphi')\varphi']\,dx$$

$$=\int_0^a \left[F_y(y+\varepsilon\varphi,y'+\varepsilon\varphi')-\frac{d}{dx}F_{y'}(y+\varepsilon\varphi,y'+\varepsilon\varphi')\right]\varphi dx.$$

将此式代入 (1.1.7) 得出

$$\int_0^a \left[F_y(y,y')-\frac{d}{dx}F_{y'}(y,y')\right]\varphi dx=0.$$

根据变分法基本引理 (见下节), 由上式得出

$$F_y(y,y')-\frac{d}{dx}F_{y'}(y,y')=0. \tag{1.1.8}$$

从变分问题出发导出的微分方程称为该变分问题的 **欧拉方程**. 因此，常微分方程 (1.1.8) 是变分问题 (1.1.5) 的欧拉方程.

由 (1.1.8) 可得

$$\frac{d}{dx}[F(y,y')-y'F_{y'}(y,y')]$$

$$=F_y(y,y')y'+F_{y'}(y,y')y''-y''F_{y'}(y,y')-y'\frac{d}{dx}F_{y'}(y,y')$$

$$=0.$$

因此有

$$F(y,y')-y'F_{y'}(y,y')=c=\text{常数}. \tag{1.1.9}$$

对于最速降线问题，将 (1.1.4) 代入上式得出

$$\frac{1}{\sqrt{2gy(1+y'^2)}}=c.$$

由此得

$$y(1+y'^2)=\frac{1}{2gc^2}=2r. \tag{1.1.10}$$

引进变数代换 $x=x(\theta)$, 并设

$$y'=\cot\frac{\theta}{2}, \tag{1.1.11}$$

则由 (1.1.10) 有

$$y=2r\sin^2\frac{\theta}{2}=r(1-\cos\theta).$$

此式对 θ 微分得出

$$y'\frac{dx}{d\theta}=r\sin\theta.$$

以 (1.1.11) 代入上式得

$$\cot\frac{\theta}{2}\frac{dx}{d\theta}=r\sin\theta,$$

由此得出

$$\frac{dx}{d\theta}=2r\sin^2\frac{\theta}{2}=r(1-\cos\theta).$$

积分此式，我们得出微分方程 (1.1.10) 的通解的参数表示

$$x=r(\theta-\sin\theta)+x_0,$$
$$y=r(1-\cos\theta),$$

其中 r 与 x_0 为任意实数. 根据边界条件 (1.1.3), 即由曲线经过坐标原点 O 得出 $x_0=0$, 再由曲线通过点 $A(a,b)$ 可以确定 r 的值. 因此，最速降线是旋轮线的一段，它是以 r 为半径的圆周:

$$x^2+(y-r)^2=r^2 \tag{1.1.12}$$

沿 X 轴旋转时，圆周上的点 (0,0) 运动的轨迹.

弹性体的平衡问题是一类重要的变分问题.

弹性体受外力作用发生变形，变形中克服内力 (弹性体各质点间的约束内力) 所做的功，作为能量贮存在弹性体内部，称为弹

性势能或变形能. 在除去外力而弹性体恢复原来的形状时，变形能就采取对外界做功的方式表现出来. 弹性力学中的最小势能原理指出：弹性体在外力作用下，在适合已知条件的一切位移中，使弹性体处于平衡状态的位移使总势能

$$E = \text{变形能} - \text{外力所做的功}$$

为最小.

例如，我们研究平面上边界固定的均匀薄膜 (不计自重) 受外力作用后的平衡位移. 实验证明，弹性薄膜的变形能与薄膜的面积的增加成正比，这个比例常数叫做薄膜的张力. 设薄膜所在平面区域为 Ω, 边界为 $\partial\Omega$. 在外力作用下，薄膜在点 $(x,y)\in\Omega$ 处的垂直位移以 $u(x,y)$ 表示，则薄膜的变形能为

$$T\left(\iint\limits_{\Omega}\sqrt{1+u_x^2+u_y^2}\,dxdy-|\Omega|\right), \tag{1.1.13}$$

其中 T 为薄膜的张力，$|\Omega|$ 为区域 Ω 的面积. 因为弹性变形为小变形，当 $u_x^2+u_y^2$ 充分小时，利用近似公式

$$\sqrt{1+\varepsilon}\approx 1+\frac{\varepsilon}{2},$$

变形能 (1.1.13) 可以改写成

$$\frac{T}{2}\iint\limits_{\Omega}(u_x^2+u_y^2)dxdy, \tag{1.1.14}$$

再设薄膜在单位面积上所受的力为 $f(x,y)$, 则此外力所做的功为

$$\iint\limits_{\Omega} f(x,y)u(x,y)dxdy.$$

于是薄膜的总势能为

$$E(u)=\frac{T}{2}\iint\limits_{\Omega}(u_x^2+u_y^2)dxdy-\iint\limits_{\Omega} fudxdy, \tag{1.1.15}$$

它是函数 $u(x,y)$ 的泛函. 由于薄膜的边界是固定的, 所以有边界条件

$$u=0,\quad 在\ \partial\Omega\ 上. \tag{1.1.16}$$

最小势能原理说明, 薄膜受外力 $f(x,y)$ 作用后, 在满足边界条件 (1.1.16) 的函数类中, 使总势能 (1.1.15) 取最小值的位移 $u(x,y)$ 就是薄膜达到平衡位置时的位移.

这样一来, 弹性薄膜平衡问题的位移就是在边界条件 (1.1.16) 下, 变分问题

$$E(u)=\frac{T}{2}\iint\limits_{\Omega}(u_x^2+u_y^2)dxdy-\iint\limits_{\Omega}fudxdy=\min \tag{1.1.17}$$

的解. 仿照最速降线问题 (或参阅定理 1.3.1 的证明) 得出这个变分问题的欧拉方程是 Poisson 方程

$$-\triangle u\equiv-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{f}{T},\quad 在\ \Omega\ 中. \tag{1.1.18}$$

这就说明, 在边界条件 (1.1.16) 下, 变分问题 (1.1.17) 的解是 Poisson 方程 (1.1.18) 的解.

我们将在 1.3 节中证明, 在满足边界条件 (1.1.16) 的一个函数类中, Poisson 方程 (1.1.18) 的解也是变分问题 (1.1.17) 的解. 也就是说, 在一定意义下, 边值问题 (1.1.18), (1.1.16) 与变分问题 (1.1.17),(1.1.16) 是等价的.

1.2 定义与记号

今后将不加声明地使用下列的记号和定义.

以 $\{u_1,\cdots,u_s\}$ 表示 s 个元素 $u_1,\cdots,u_s$ 的集合, 而以 $\{u_k\}$ 表示由可数个元素 $u_1,u_2,\cdots$ 组成的序列. 符号 $\varnothing$ 表示空集. 以 $\{x|P\}$ 表示具有性质 P 的所有元素 x 的集合. 两个集合 A 与 B 的差

$$A-B=\{x|x\in A,x\notin B\}$$

常以 $A\backslash B$ 表示.

以 R^n 表示所有 n 维点 $x=(x_1,\cdots,x_n)$ 的集合，叫做 n 维向量空间， $|x|=(x_1^2+\cdots+x_n^2)^{\frac{1}{2}}$ 为点 x 的范数 (长度), $x\cdot y=x_1y_1+\cdots+x_ny_n$ 为两点 x 与 y 的内积. $R^1=R$.

R^n 中的一个连通开集 Ω叫做 R^n 中的一个 **区域**, $\partial\Omega$ 表示 Ω的边界， $\overline{\Omega}=\Omega+\partial\Omega$ 表示 Ω 在 R^n 中的闭包， $|\Omega|$ 表示 Ω 的体积. 如果 D 也是一个区域，且 $\bar{D}$ 是 Ω 的紧子集 (有界闭子集), 则记为 $D\subset\subset\Omega$.

$B_r(y)=\{x\in R^n||x-y|<r\}$ 表示中心在 y , 半径为 r 的开球.

对函数 $u(x)=u(x_1,\cdots,x_n)$, 记 $D_iu=\dfrac{\partial u}{\partial x_i}$, $D_{ij}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j}$, $Du=\bigtriangledown u=(D_1u,\cdots,D_nu)$ 为 u 的梯度， $Du\cdot Dv=D_1uD_1v+\cdots+D_nuD_nv$, $|Du|=(|D_1u|^2+\cdots+|D_nu|^2)^{\frac{1}{2}}$, $\triangle u=D_{11}u+\cdots+D_{nn}u$, $\triangle$ 称为 (n 维)Laplace 算子.

非负整数组 $\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$ 叫做重指标，并记 $|\alpha|=\alpha_1+\cdots+\alpha_n$, $\alpha!=\alpha_1!\alpha_2!\cdots\alpha_n!$, $x^\alpha=x_1^{\alpha_1}\cdots x_n^{\alpha_n}$, $D^\alpha=D_1^{\alpha_1}\cdots D_n^{\alpha_n}$ 表示一个 $|\alpha|$ 阶的微分算子， $D^\alpha u=\dfrac{\partial^{|\alpha|}u}{\partial x_1^{\alpha_1}\cdots\partial x_n^{\alpha_n}}$.

对定义在区域 Ω 内的函数，集合

$$\mathrm{supp}u=\{x\in\Omega|u(x)\neq 0\}$$

的闭包，称为 u 的 **支集**. 如果 $\mathrm{supp}u\subset\subset\Omega$, 则称 u 在 Ω 中有紧支集.

符号 $\forall\alpha$ 表示：对一切 α; 而 $\forall|\alpha|\leq m$ 表示：对满足 $|\alpha|\leq m$ 的一切 α.

设 m 为非负整数，我们常用到下面一些由连续函数组成的集合 (也叫做函数空间).

$$C^m(\Omega)=\{u|D^\alpha u\text{在}\Omega\text{内连续}, \quad \forall|\alpha|\leq m\}.$$

$$C^\infty(\Omega)=\bigcap_{m=0}^{\infty}C^m(\Omega)=\{u|D^\alpha u \text{ 在 } \Omega \text{ 内连续}, \quad \forall\alpha\}.$$

$$C_0^m(\Omega) = \{u \in C^m(\Omega) | u \text{ 在 } \Omega \text{ 中有紧支集}\}.$$

$$C_0^\infty(\Omega) = \{u \in C^\infty(\Omega) | u \text{ 在 } \Omega \text{ 中有紧支集}\}.$$

$$C^m(\bar{\Omega}) = \{u | D^\alpha u \text{ 在 } \bar{\Omega} \text{ 上连续}, \quad \forall |\alpha| \le m\}.$$

以后如果没有特别说明，都假定 Ω 是 R^n 中的有界区域，并简记 $C(\Omega) = C^0(\Omega)$, $C_0(\Omega) = C_0^0(\Omega)$, $C(\bar{\Omega}) = C^0(\bar{\Omega})$.

$C = C(*, \cdots, *)$ 表示只依赖于出现在括号中的量的常数. 相同的 C 可以表示依赖于同一组变量的不同常数.

1.3 Poisson 方程边值问题与变分问题

本节证明一般的 Poisson 方程 Dirichlet 问题

$$-\triangle u = f(x), \quad \text{在 } \Omega \text{ 中}, \tag{1.3.1}$$

$$u = g, \quad \text{在 } \partial\Omega \text{ 上}, \tag{1.3.2}$$

等价于一个变分问题. 为此, 我们先证明下面的引理.

变分法基本引理 如果函数 $u \in C^0(\Omega)$ 满足

$$\int_\Omega u(x)\phi(x)dx = 0, \qquad \forall \phi \in C_0^\infty(\Omega), \tag{1.3.3}$$

则在 Ω中 $u \equiv 0$.

证 用反证法. 假定存在 $x_0 \in \Omega$ 使 $u(x_0) \neq 0$, 不妨假定 $u(x_0) > 0$. 由函数 $u(x)$ 的连续性，存在 x_0 的邻域 $B_r(x_0) \subset \Omega$, 使得 $u(x) > 0$, $\forall x \in B_r(x_0)$.

对于函数

$$\phi(x) = \begin{cases} \exp\left\{\dfrac{|x - x_0|^2}{|x - x_0|^2 - \varepsilon^2}\right\}, & \text{当} x \in B_\varepsilon(x_0), \\ 0, & \text{当} x \in \Omega \backslash B_\varepsilon(x_0), \end{cases}$$

容易验证

$$\phi(x) \in C_0^\infty(\Omega), \phi(x) > 0, \quad \forall x \in B_\varepsilon(x_0).$$

于是有

$$\int_{\Omega} u(x)\phi(x)dx = \int_{B_\varepsilon(x_0)} u(x)\phi(x)dx > 0.$$

此式与假设 u 满足条件 (1.3.3) 矛盾. 证毕.

采用记号

$$B^2 = \{v \in C^2(\Omega)\bigcap C^1(\bar{\Omega})|\ v = g \text{ 在 } \partial\Omega \text{ 上}\},$$

$$B_0^2 = \{v \in C^2(\Omega)\bigcap C^1(\bar{\Omega})|\ v = 0 \text{ 在 } \partial\Omega \text{ 上}\},$$

$$I(v) = \int_{\Omega} (\frac{1}{2}|Dv|^2 - fv)dx. \tag{1.3.4}$$

下面的定理说明, 求边值问题 (1.3.1),(1.3.2) 在 B_0^2 中的解等价于在 B_0^2 中求泛函 (1.3.4) 的极值函数.

定理 1.3.1 设 Ω 具有 C^1 边界 $\partial\Omega$, $u \in B^2$. 那么, u 是 Poisson 方程 (1.3.1) 的解的充要条件是: u 是变分问题

$$I(u) = \min_{v\in B^2} I(v) \tag{1.3.5}$$

的解.

证 先证明条件是必要的. 设 $u \in B^2$ 是 Poisson 方程 (1.3.1) 的解. 在欧拉公式 (Euler 定理)

$$\int_{\Omega}(D_1w_1+\cdots+D_nw_n)dx = \int_{\partial\Omega}[w_1\cos(\nu,x_1)+\cdots+w_n\cos(\nu,x_n)]ds \tag{1.3.6}$$

(其中 ν 为外法向单位向量) 中取

$$(w_1,\cdots,w_n) = (vD_1u,\cdots,vD_nu) = vDu, \quad v \in B^2.$$

得出格林 (Green) 公式

$$\int_{\Omega} v \triangle u dx + \int_{\Omega} Dv \cdot Du dx = \int_{\partial\Omega} v\frac{\partial u}{\partial \nu}ds. \tag{1.3.7}$$

由于 $-\triangle u = f$, 由上式得出:

$$\int_\Omega (Du\cdot Dv - fv)dx = 0, \quad \forall v\in B_0^2. \tag{1.3.8}$$

对任意 $v\in B^2$, 令 $v-u=\varphi$, 则 $v=u+\varphi$, $\varphi\in B_0^2$. 由 (1.3.4) 及 (1.3.8) 有

$$\begin{aligned} I(v) &= I(u+\varphi) \\ &= \frac{1}{2}\int_\Omega |Du+D\varphi|^2 dx - \int_\Omega f(u+\varphi)dx \\ &= I(u) + \int_\Omega (Du\cdot D\varphi - f\varphi)dx + \frac{1}{2}\int_\Omega |D\varphi|^2 dx \\ &= I(u) + \frac{1}{2}\int_\Omega |D\varphi|^2 dx \geq I(u). \end{aligned} \tag{1.3.9}$$

此式表明 u 是变分问题 (1.3.5) 的解.

再证明条件是充分的. 设 $u\in B^2$ 是变分问题 (1.3.5) 的解. 任取函数 $\phi\in C_0^\infty(\Omega)$, 于是对任意参数 $t\in R$ 有 $u+t\phi\in B^2$. 由 (1.3.5) 知道

$$I(u) = \min_{t\in R} I(u+t\phi).$$

因此有

$$\frac{d}{dt}I(u+t\phi)|_{t=0} = 0. \tag{1.3.10}$$

由 I 的定义 (1.3.4) 有

$$\begin{aligned} I(u+t\phi) &= \int_\Omega \left[\frac{1}{2}|Du+tD\phi|^2 dx - f(u+t\phi)\right] dx \\ &= I(u) + t\int_\Omega (Du\cdot D\phi - f\phi)dx + \frac{t^2}{2}\int_\Omega |D\phi|^2 dx. \end{aligned}$$

将此式代入 (1.3.10) 得出

$$\int_\Omega (D\phi\cdot Du - f\phi)dx = 0. \tag{1.3.11}$$

在格林公式 (1.3.7) 中命 $v=\phi\in C_0^\infty(\Omega)$ 得出

$$\int_\Omega \phi \triangle u dx + \int_\Omega D\phi \cdot Du dx = 0. \tag{1.3.12}$$

由 (1.3.12) 减去 (1.3.11) 得

$$\int_\Omega \phi(\triangle u + f)dx = 0.$$

由于 $\phi\in C_0^\infty(\Omega)$ 是任意的, 对上式利用变分法基本引理知道 $\triangle u+f\equiv 0$, 即 u 满足 Poisson 方程 (1.3.1). 证完.

上面的定理说明, 在函数类 B^2 中, 求 Poisson 方程 (1.3.1) 的解与求变分问题 (1.3.5) 的解是等价的; 也就是说, 对 Poisson 方程边值问题 (1.3.1),(1.3.2) 的研究可以化为对变分问题 (1.3.5) 的研究. 通过变分问题的研究解决微分方程边值问题, 这就是微分方程中的变分方法.

第二章 Banach 空间与 Hilbert 空间

这一章为第三章及第四章用变分方法研究线性微分方程边值问题提供必要的泛函分析基础知识. 本书将限于讨论实方程及实解. 因此, 我们用到的线性空间都假定是定义在实数域 R 上的.

定义 V 是一个非空集合. 如果

(i) V 中有加法运算: $V \times V \to V$, 即对任意两个元素 $x, y \in V$, 存在唯一的元素 $x+y \in V$, 且 V 对此加法成一加群, 即满足

1° 交换律: $x+y=y+x$;

2° 结合律: $(x+y)+z=x+(y+z)$;

3° 逆运算减法存在: 对一切 $x, y \in V$, 存在唯一的 $z \in V$, 使得 $x+z=y$, 并记 $z=y-x$.

(ii) 实数域 R 与 V 中元素有数乘运算: $R \times V \to V$, 即对任一数 $a \in R$ 及任一元素 $x \in V$, 存在唯一的元素 $ax \in V$ 与之对应, 且数乘满足通常向量的运算规则:

4° 结合律: $a(bx)=(ab)x$;

5° 数乘与 V 中加法的分配律: $a(x+y)=ax+ay$;

6° 实数加法与数乘的分配律: $(a+b)x=ax+bx$;

7° $1 \cdot x=x$.

那么, V 叫做 **实线性空间**, 简称 **线性空间**.

线性空间 V 的子集 D 满足条件:

$x, y \in D$, 则 $x+y \in D$;

$a \in R, x \in D$, 则 $ax \in D$

时, D 也是一个线性空间, 称为 V 的 **线性子集合** 或 **线性子空间**, 简称为 V 的 **子空间**.

2.1 Banach 空间

定义 1 V 是一个线性空间. 如果 $V \to R$ 的映射 $x \to ||x||$ 满足

$1°$ $||x|| \geq 0, \quad \forall x \in V, ||x|| = 0$ 当且仅当 $x = 0$;

$2°$ $||ax|| = |a| \, ||x||, \quad \forall a \in R, x \in V$;

$3°$ $||x + y|| \leq ||x|| + ||y|| \quad \forall x, y \in V$(三角形不等式).

则称 $||x||$ 是 V 中元素 x 的 **范数**. 对线性空间 V 赋予范数后, 称 V 为 **线性赋范空间**.

定义 2 V 是一个线性赋范空间, 且 $x_n \in V, n = 1, 2, 3, \cdots$. 如果 $m, n \to \infty$ 时, $||x_m - x_n|| \to 0$, 则称序列 $\{x_n\}$**在 V 中自身收敛** 或 $\{x_n\}$ 为 V 中的 **Cauchy 序列**. 如果 $x \in V$, 且当 $n \to \infty$ 时, $||x_n - x|| \to 0$, 则称序列 $\{x_n\}$**在 V 中收敛于**x. 如果 V 中每一 Cauchy 序列均收敛于 V 中的一个元素, 则称 V 为完备的. 完备的线性赋范空间又称为 **Banach 空间**.

例 1 n 维欧氏空间 R^n 关于范数 (长度)

$$|x| = (x_1^2 + \cdots + x_n^2)^{\frac{1}{2}}$$

是 Banach 空间.

例 2 对有界区域 $\Omega \subset R^n$, 函数集合

$$C^m(\bar{\Omega}) = \{u | D^\alpha u \text{在} \bar{\Omega} \text{上连续}, \quad \forall |\alpha| \leq m\}$$

关于范数

$$||u||_{C^m(\bar{\Omega})} = |u|_m = |u|_{m,\Omega} = \max_{|\alpha| \leq m} \max_{x \in \bar{\Omega}} |D^\alpha u(x)|$$

成为一个 Banach 空间.

例 3 闭区间 $[-1, 1]$ 上所有连续函数的集合 $C([-1, 1])$ 关于范数

$$||u||_2 = ||u||_{2,(-1,1)} = \left(\int_{-1}^{1} |u(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \tag{2.1.1}$$

成为一个线性赋范空间，但它不是完备的. 例如，这个空间的函数序列

$$\phi_n(x)=\begin{cases}-1, & 当-1\le x\le -1/n,\\ nx, & 当-1/n\le x\le 1/n,\\ 1, & 当1/n\le x\le 1\end{cases} \tag{2.1.2}$$

满足：当 $m>n$ 时有

$$||\phi_m-\phi_n||_2^2=\int_{-1}^{1}|\phi_m(x)-\phi_n(x)|^2dx$$

$$=2\int_0^1|\phi_m(x)-\phi_n(x)|^2dx$$

$$=2\int_0^{\frac{1}{m}}|mx-nx|^2dx+2\int_{\frac{1}{m}}^{\frac{1}{n}}|1-nx|^2dx$$

$$=2(m-n)^2\int_0^{\frac{1}{m}}x^2dx-\frac{2}{3n}(1-nx)^3\Big|_{\frac{1}{m}}^{\frac{1}{n}}$$

$$=\frac{2(m-n)^2}{3m^3}+\frac{2}{3n}\left(1-\frac{n}{m}\right)^3$$

$$=\frac{2(m-n)^2}{3m^2n}\le\frac{2}{3n}$$

由此式得出：当 $m,n\to\infty$ 时，有 $||\phi_m-\phi_n||_2\to 0$, 即 $\{\phi_n\}$ 是函数空间 $C([-1,1])$ 中的 Cauchy 序列. 显然，在普通逐点收敛的意义下，$\{\phi_n\}$ 的极限函数是

$$\phi(x)=\begin{cases}-1, & 当-1\le x<0,\\ 0, & 当x=0,\\ 1, & 当0<x\le 1.\end{cases} \tag{2.1.3}$$

由 (2.1.2) 及 (2.1.3), 当 $n \to \infty$ 时有

$$\int_{-1}^{1}|\phi_n(x)-\phi(x)|^2dx = 2\int_{0}^{1}|\phi_n(x)-\phi(x)|^2dx$$
$$= 2\int_{0}^{\frac{1}{n}}|nx-1|^2dx = \frac{2}{3n} \to 0. \tag{2.1.4}$$

我们来证明 $\{\phi_n\}$ 在 $C([-1,1])$ 中没有极限元素. 相反，我们假定 $\{\phi_n\}$ 有极限元素 $\bar{\phi} \in C([-1,1])$, 即

$$||\phi_n-\bar{\phi}||_2^2 = \int_{-1}^{1}|\phi_n(x)-\bar{\phi}(x)|^2dx \to 0, \quad 当 n \to \infty. \tag{2.1.5}$$

由 (2.1.4) 及 (2.1.5) 得出

$$\int_{-1}^{0}|\bar{\phi}(x)-\phi(x)|^2dx \le \int_{-1}^{1}|\bar{\phi}(x)-\phi(x)|^2dx$$
$$\le \int_{-1}^{1}|[\phi_n(x)-\phi(x)]-[\phi_n(x)-\bar{\phi}(x)]|^2dx$$
$$\le 2\int_{-1}^{1}|\phi_n(x)-\phi(x)|^2dx + 2\int_{-1}^{1}|\phi_n(x)-\bar{\phi}(x)|^2dx$$
$$\to 0, 当 n \to \infty.$$

因此

$$\int_{-1}^{0}|\bar{\phi}(x)-\phi(x)|^2dx = 0.$$

而 $\bar{\phi}(x)$ 及 $\phi(x)$ 在半开区间 $[-1,0)$ 上都是连续函数, 于是在 $[-1,0)$ 上有 $\bar{\phi}(x)=\phi(x)$. 同理可证，在 $(0,1]$ 上有 $\bar{\phi}(x)=\phi(x)$. 再由 (2.1.3) 得

$$\bar{\phi}(x) = \begin{cases} -1, & 当 -1 \le x < 0, \\ 1, & 当 0 < x \le 1. \end{cases} \tag{2.1.6}$$

由此看出，$\bar{\phi}(x)$ 在 $[-1,1]$ 上不可能是连续函数，这与假定 $\bar{\phi}(x) \in C([-1,1])$ 矛盾. 因此，$\{\phi_n\}$ 在 $C([-1,1])$ 中没有极限元素，即 $C([-1,1])$ 关于范数 (2.1.1) 是不完备的线性赋范空间.

在例 3 的讨论中还可以看出，对于 (2.1.1) 定义的范数，空间 $C([-1,1])$ 中的 Cauchy 序列 (2.1.2) 在 $C([-1,1])$ 中没有极限元素，但由 (2.1.6) 定义的平方可积函数 $\bar{\phi}(x)$($\bar{\phi}(0)$ 的值可以任意取定) 实际上是序列 $\{\phi_n\}$ 的极限函数，只是此极限函数不再属于 $C([-1,1])$. 这里需要指出，由 (2.1.6) 定义但具不同值 $\bar{\phi}(0)$ 的这些函数 $\bar{\phi}(x)$ 称为在 $[-1,1]$ 上几乎处处相等，并在可积函数类中视它们为同一个函数.

如像在有理数集合中补充无理数得到实数集合一样，我们可以对不完备的线性赋范空间 V 用下述方法补充一些新元素而得到一个完备的线性赋范空间 (Banach 空间):V 中 Cauchy 序列 $\{\phi_n\}$ 如果没有属于 V 的极限元素，则定义一个新元素 ϕ 作为序列 $\{\phi_n\}$ 的极限元素； 如果另有 Cauchy 序列 $\{\bar{\phi}_n\}$ 满足 $||\phi_n-\bar{\phi}_n||\to 0$, 当 $n\to\infty$, 则视 $\{\bar{\phi}_n\}$ 与 $\{\phi_n\}$ 有相同的极限元素 ϕ; 对新元素 ϕ 定义范数 $||\phi||=\lim\limits_{n\to\infty}||\phi_n||$. 这样得到一个包含 V 的完备空间称为 V 的 **完备化**(空间).

空间 $C[-1,1])$ 关于范数 (2.1.1) 完备化所得到的空间称为 (在 Lebesgue 意义下的)**平方可积函数空间**, 记为 $L^2((-1,1))$. 一般地，设 $p\geq 1$, Ω是 n 维区域，则 $C(\bar{\Omega})$ 关于范数

$$||u||_{L^p(\Omega)}=||u||_p=||u||_{p,\Omega}=(\int_\Omega |u(x)|^p dx)^{\frac{1}{p}}$$

的完备化是 Ω 上 **p次方可积函数空间**

$$L^p(\Omega)=\{u|\int_\Omega |u(x)|^p dx<\infty\}.$$

定义 3 设 E 是 Banach 空间， A 是 E 的一个子集.

(i) 如果存在 $C\in R$, 使得 $||u||\leq C$, $\forall u\in A$, 则称 A 为 E 中的 **有界集**.

(ii) 如果 A 中的每一个 Cauchy 序列的极限元素都属于 A, 则称 A 为 E 中的 **闭集**.

(iii) 如果 $S\subset A$, 且对每一元素 $u\in A$, 都存在 $\{u_n\}\subset S$, 使

得当 $n \to \infty$ 时，在 E 中有 $u_n \to u$, 则称 S 为 A 的 **稠密子集** 或 S 在 A 中 **稠密**.

(iv) 如果 A 的每一个无穷子集都有收敛的子序列，则称 A 是 E 中的 **列紧集** 或 **准紧集**. 如果 E 中的列紧集 A 又是闭集（即 A 的每一个无穷子集的每一个收敛子序列的极限元素都属于 A), 则称 A 是 E 中的 **紧集**.

Banach 空间中的列紧集都是有界集. 在有限维 Banach 空间中，有界集都是列紧集，有界闭集都是紧集.

无限维 Banach 空间中有界集不一定是列紧集. 例如，当

$$u_n(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin nx$$

时，有

$$||u_n||_2^2 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx dx = 1.$$

因而序列 $\{u_n(x)\}$ 是 $L^2((-\pi, \pi))$ 中的有界集. 但对 $m \neq n$ 有 $||u_m - u_n|| = \sqrt{2}$, 即 $\{u_n(x)\}$ 在 $L^2((-\pi, \pi))$ 中没有收敛的子序列. 这就证明了 $\{u_n(x)\}$ 在 $L^2((-\pi, \pi))$ 中是有界集而不是列紧集.

对于 R^n 中的有界区域 Ω, 著名的 Arzelà-Ascoli 定理给出了 $C(\bar{\Omega})$ 中的集合具有列紧性的条件.

定理 2.1.1 如果 $C(\bar{\Omega})$ 中的集合满足下面条件:

(i) S 是一致有界的，即存在常数 $K > 0$, 使得

$$|u(x)| \leq K, \qquad \forall x \in \bar{\Omega}, u \in S$$

亦即

$$||u||_{C(\bar{\Omega})} = \max_{x \in \bar{\Omega}} |u(x)| \leq K, \qquad \forall u \in S;$$

(ii) S 是等度连续的，即对于任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, 使得对任意 $x, y \in \bar{\Omega}$, 且 $|x - y| < \delta$, 则

$$|u(x) - u(y)| < \varepsilon, \qquad \forall u \in S.$$

那么 S 是 $C(\bar{\Omega})$ 中的列紧集.

对于空间 $L^p(\Omega)$, 有类似的列紧性判别定理如下:

定理 2.1.2 设 Ω 是 R^n 中的有界区域, $1 \le p < \infty, S \subset L^p(\Omega)$, 满足下列条件, 那么, S 是 $L^p(\Omega)$ 中的列紧集:

(i) S 是有界的, 即存在常数 $K > 0$, 使得

$$||u||_p \le K, \qquad \forall u \in S;$$

(ii) S 是"等度整体连续"的, 即对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, 使得对任意 $h \in R^n$, 只要 $|h| < \delta$, 就有

$$||u(x+h) - u(x)||_p = \left(\int_\Omega |u(x+y) - u(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon, \qquad \forall u \in S,$$

其中 $u(x) = 0, \quad \forall x \in R^n \backslash \Omega$.

这个定理属于 Riesz[34], 也可在文献 [9] 及 [17] 中找到更一般的定理 (即包含 Ω 为无界区域的情形). 定理 2.1.1 及定理 2.1.2 的证明见附录 2.

定义 4 设 S 是一个非空集合. 如果函数 $\rho : S \times S \to R$ 满足条件:

(i) $\rho(x,y) \ge 0$; $\rho(x,y) = 0$ 的充要条件是 $x = y$;

(ii) $\rho(x,y) = \rho(y,x)$;

(iii) (三角形不等式) $\rho(x,y) \le \rho(x,z) + \rho(y,z)$.

则称 $\rho(x,y)$ 为 x 与 y 的 **距离**, 此时称 (S,ρ) 或 S 为 **距离空间** 或 **度量空间**.

显然, 对线性赋范空间 V 中的任意非空子集 S, 如果定义 $\rho(x,y) = ||x - y||$, 则 S 成为一度量空间.

定义 5 设 S 是一个度量空间, 如果 $x \in S$, 序列 $\{x_k\} \subset S$ 满足

$$\rho(x_k, x) \to 0, \qquad 当 k \to \infty,$$

则称序列 $\{x_k\}$ 收敛于 x, 记为 $x_k \to x (k \to \infty)$ 或 $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = x$.

根据这个定义，可以将定义 2 及定义 3 中的空间完备性、闭集、(列) 紧集及稠密等概念照搬到度量空间中来.

引理 2.1.3 设 E 是一个度量空间. 如果 $S \subset A \subset E$, 则 S 在 A 中稠密的充要条件是:

$$\text{对任意} x \in A \text{及任意正数} \epsilon, \text{ 存在} y \in S \text{使得} \rho(y,x) < \epsilon. \qquad (2.1.7)$$

证 先证明条件 (2.1.7) 是充分的. 设条件 (2.1.7) 成立. 取正数序列 $\epsilon_k \to 0$. 对任意 $x \in A$ 及正数 ϵ_k, 存在 $x_k \in S$ 使得 $\rho(x_k, x) < \epsilon_k$. 从而 $\rho(x_k, x) \to 0$. 也就是说，对任意 $x \in A$, 存在 $\{x_k\} \subset S$ 使得 $x_k \to x$. 由定义 3 知道 S 在 A 中稠密.

再证明条件 (2.1.7) 是必要的. 设 S 在 A 中稠密，即对任意 $x \in A$ 存在 $\{x_k\} \subset S$ 使得 $x_k \to x$. 因此，对任意正数 ϵ, 存在正整数 N, 使得 $\rho(x_N, x) < \epsilon$. 记 $y = x_N$, 即知条件 (2.1.7) 成立.

定义 6 如果在度量空间 S 中存在稠密的可数子集，则称 S 是 **可分** 的.

例 4 n 维欧氏空间 R^n 是可分的. 因为所有坐标 $x_i(i = 1,2,\cdots,n)$ 为有理数的点 $x = (x_1,\cdots,x_n)$ 的集合 S 是 R^n 的可数子集，且 S 在 R^n 中稠密.

例 5 设 Ω是 R^n 中的有界区域，空间 $C(\bar{\Omega})$ 是可分的. 由 Stone-Weierstrass 定理，$x = (x_1,\cdots,x_n)$ 的所有实系数多项式所成的集合 P 在 $C(\bar{\Omega})$ 中是稠密的；而 x 的所有有理系数多项式所成的集合 A 在 P 中是稠密的；因此，集合 A 在 $C(\bar{\Omega})$ 中也是稠密的. 再由于 A 是 $C(\bar{\Omega})$ 的可数子集得知 $C(\bar{\Omega})$ 是可分空间.

例 6 对 R^n 中的有界区域 Ω, $1 \le p < \infty$, 空间 $L^p(\Omega)$ 是可分的. 由例 5，有理系数多项式集合 A 在 $C(\bar{\Omega})$ 中关于范数 $\|\cdot\|_{C(\bar{\Omega})}$ 是稠密的，易证 A 在 $C(\bar{\Omega})$ 中关于范数 $\|\cdot\|_{L^p(\Omega)}$ 也是稠密的. 但由 $L^p(\Omega)$ 为 $C(\bar{\Omega})$ 关于范数 $\|\cdot\|_{L^p(\Omega)}$ 的完备化知道，$C(\bar{\Omega})$ 在 $L^p(\Omega)$ 中是稠密的. 因此，有理系数多项式所成的可数集合 A 在 $L^p(\Omega)$ 中是稠密的，即 $L^p(\Omega)$ 是可分空间.

定理 2.1.4 可分度量空间的子空间也是可分的.

证　设度量空间 V 有可数稠密子集 $S=\{x_k\}$, W 是 V 的子空间，取 $\delta_1>\delta_2>\cdots>\delta_n>\cdots>0$ 使得 $\delta_j\to 0$(当 $j\to\infty$). 对 δ_j, 由于 S 在 V 中稠密及定义

$$\operatorname{dist}(x_k,W)=\inf_{z\in W}||z-x_k||, \tag{2.1.8}$$

存在 $z_{kj}\in W$ 使得

$$||z_{kj}-x_k||<\operatorname{dist}(x_k,W)+\delta_j. \tag{2.1.9}$$

今证 $Z=\{z_{kj}\}$ 是 W 的稠密子集. 设 $x\in W$, 对任意正数 ε, 视 $x\in V$, 由 S 是 V 的稠密子集，利用引理 2.1.3 知道：存在 $x_k\in S$ 使得

$$||x_k-x||<\frac{\varepsilon}{3}. \tag{2.1.10}$$

取 j 充分大使 $\delta_j<\dfrac{\varepsilon}{3}$. 由 (2.1.9), (2.1.10) 及 (2.1.8) 得出

$$\begin{aligned}||z_{kj}-x|| &\le ||z_{kj}-x_k||+||x_k-x||\\ &\le \operatorname{dist}(x_k,W)+\delta_j+\frac{\varepsilon}{3}\\ &<||x-x_k||+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}\\ &<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon.\end{aligned}$$

再由引理 2.1.3 得出可数集 $Z=\{z_{kj}\}$ 是 W 的稠密子集，从而 W 是可分的.

2.2　算子与泛函

设 E 及 B 是两个 Banach 空间， $D\subset E$, A 为 D 到 B 中的算子 (即 D 中每一元素 x 对应于 B 中的唯一元素 Ax), 记为 $A:D\to B$. 算子 $A:D\to E$ 又称为 D 上的算子.

若算子 A 把 D 中任何有界集均映成 B 中的有界集，则称 A 在 D 上 **有界**.

若对任意元素 $x \in D$ 及序列 $\{x_k\} \subset D$, 当 $x_k \to x$(在 E 中)时，必有 $Ax_k \to Ax$(在 B 中), 则称 A 在 D 上 **连续**. 以 $C(D,B)$ 表示所有连续算子 $A: D \to B$ 的集合.

若 A 把 D 中任意有界集均映成 B 中的列紧集，则称 A 是 D 到 B 中的 **紧算子**.

显然，紧算子必定是有界的.

D 到 B 中的连续紧算子又叫做 D 到 B 中的 **全连续算子**.

若对算子 $A: D \to B$, 存在常数 $M > 0$ 使得

$$||Ax||_B \leq M||x||_E, \quad \forall x \in D, \tag{2.2.1}$$

则 A 把 D 中的有界集映成 B 中的有界集，即 A 在 D 上有界. 一般说来，有界算子 $A: D \to B$ 不一定满足条件 (2.2.1).

若算子 $A: D \to B$ 满足条件

$$A(x+y) = Ax + Ay, \qquad \forall x, y \in D,$$

$$A(ax) = aAx, \qquad \forall a \in R, x \in D,$$

则称 A 在 D 上是线性的.

单位球面 $S_1 = \{x \in E| \, ||x||_E = 1\}$ 是 E 中的有界集. 若算子 $A: E \to B$ 是有界的，则集合 $\{Ax|x \in S_1\}$ 在 B 中是有界的，即

$$\sup_{\substack{x \in E \\ ||x||=1}} ||Ax||_B = M < \infty.$$

集合 S_1 又可表示为

$$S_1 = \left\{ y = \frac{x}{||x||_E} \Big| 0 \neq x \in E \right\}. \tag{2.2.2}$$

若 $A: E \to B$ 是线性算子，则对 $y = \dfrac{x}{||x||_E}$ 有

$$Ay = \frac{Ax}{||x||_E}, \quad ||Ay||_B = \frac{||Ax||_B}{||x||_E}. \tag{2.2.3}$$

若 $A: E \to B$ 是线性有界算子，由 (2.2.3) 及 (2.2.2) 得出

$$\sup_{0 \neq x \in E} \frac{||Ax||_B}{||x||_E} = \sup_{\substack{x \in E \\ ||x||_E = 1}} ||Ax||_B = M < \infty. \tag{2.2.4}$$

由此式易知：线性有界算子 $A: E \to B$ 满足条件

$$||Ax||_B \le M||x||_E, \qquad \forall x \in E. \tag{2.2.5}$$

反之，若线性算子 $A: E \to B$ 满足条件 (2.2.5), 则 A 在 E 上是有界的. 因此，一般有把满足条件 (2.2.5) 的线性算子 $A: E \to B$ 称为 E 上的线性有界算子.

设 $A: E \to B$ 是线性有界算子, 则对任意 $x \in E$ 及 $\{x_k\} \subset E$, 由 (2.2.5) 得

$$||Ax_n - Ax||_B = ||A(x_n - x)||_B \le M||x_n - x||_E.$$

由此知道，当 $x_n \to x$ 时推出 $Ax_n \to Ax$. 这就是说，线性有界算子 $A: E \to B$ 是线性连续算子. 因此，线性紧算子 $A: E \to B$ 是线性有界算子，也是线性连续算子，也是线性全连续算子.

以 $\mathcal{L}(E, B)$ 表示所有线性有界算子 $A: E \to B$ 的集合. 对 $A_1, A_2 \in \mathcal{L}(E, B))$ 定义算子的加法 $A = A_1 + A_2$ 为

$$Ax = A_1x + A_2x, \qquad \forall x \in E,$$

定义数 $a \in R$ 与算子 $A \in \mathcal{L}(E, B)$ 的乘法 aA 为

$$(aA)x = a(Ax),$$

再将等式 (2.2.4) 定义为算子 A 的范数，即

$$||A|| = \sup_{0 \neq x \in E} \frac{||Ax||_B}{||x||_E} = \sup_{\substack{x \in E \\ ||x|| = 1}} ||Ax||_B.$$

容易证明 $\mathcal{L}(E, B)$ 也是一个 Banach 空间，称为 E 到 B 中的线性有界算子空间.

算子 $A: E \to R$ 又称为 E 上的泛函. Banach 空间 E 上所有线性连续泛函所成的 Banach 空间 $\mathcal{L}(E,R)$ 称为 E 的共轭空间或对偶空间, 记为 E^* 或 E'.

设 $D \subset E$, 对所有 $x \in D$, 把 x 映成 x 自身 (即 $Ix = x$) 的算子 I 称为 D 上的 **恒等算子** 或 **单位算子**.

设 A 与 B 都是 $E \to E$ 的算子, 则由对应

$$x \to B(Ax)$$

确定一个 $E \to E$ 的算子, 称为算子 B 与 A 的 **乘积**, 记为 BA, 即

$$(BA)(x) = B(Ax).$$

引理 2.2.1 设 A 是 $E \to E$ 的线性有界算子, 则 $A^0 = I, A^m = A(A^{m-1}$(整数 $m \geq 1$) 都是线性有界算子, 且有

$$||A^m|| \leq ||A||^m. \tag{2.2.6}$$

此引理用数学归纳法容易证明.

设 $D \subset E, A: D \to B$. 如果对每一元素 $y \in B$, 方程

$$Ax = y$$

有唯一解 $x \in D$, 则把对应 $y \to x$ 看成 B 到 E 中的算子, 称为 A 的 **逆 (算子)**, 记为 A^{-1}, 即

$$A^{-1}y = x, \quad \forall y \in B. \tag{2.2.7}$$

这时 A 称为 **可逆的**.

显然, $AA^{-1} = I_B$ 是 B 上的恒等算子, $A^{-1}A = I_D$ 是 D 上的恒等算子. 容易证明: 若 $A: D \to E$ 是线性的, 则 $A^{-1}: B \to D$ 也是线性的.

定理 2.2.2 设 E 是 Banach 空间, $A: E \to E$ 为有界线性算子, 且 $||A|| < 1$, 那么有

(i) 对所有 $x \in E$, $\sum\limits_{k=0}^{m} A^k x$ 在 E 中收敛 (当 $m \to \infty$), 记极限元素为 $\sum\limits_{k=0}^{\infty} A^k x$, 即

$$\sum_{k=0}^{\infty} A^k x = \lim_{m \to \infty} \sum_{k=0}^{m} A^k x. \tag{2.2.8}$$

(ii) 对应

$$x \to \sum_{k=0}^{\infty} A^k x$$

确定的算子 $\sum\limits_{k=0}^{\infty} A^k : E \to E$ 是线性有界的.

(iii) $I - A$ 为可逆算子，且

$$(I - A)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} A^k. \tag{2.2.9}$$

证 因为 $||A|| < 1$, 故级数 $\sum\limits_{k=0}^{\infty} ||A||^k$ 收敛，记

$$\sum_{k=0}^{\infty} ||A||^k = M. \tag{2.2.10}$$

(i) 对任意 $x \in E$, 令 $y_m = \sum\limits_{k=0}^{m} A^k x$. 当 $m > l$ 时，由引理 2.2.1 及级数 (2.2.10) 的收敛性得

$$\begin{aligned}
||y_m - y_l|| &= \left\|\sum_{k=0}^{m} A^k x - \sum_{k=0}^{l} A^k x\right\| \\
&= \left\|\sum_{k=l+1}^{m} A^k x\right\| \leq \sum_{k=l+1}^{m} ||A^k x|| \leq \sum_{k=l+1}^{m} ||A^k||\ ||x|| \\
&\leq \sum_{k=l+1}^{m} ||A||^k ||x|| \to 0, \text{当} m, l \to \infty.
\end{aligned}$$

于是 $\{y_m\}$ 为 E 中的 Cauchy 序列，若记它的极限元素为 $\sum\limits_{k=0}^{\infty} A^k x$，则有

$$y_m = \sum_{k=0}^{m} A^k x \to \sum_{k=0}^{\infty} A^k x, \quad 在E中, \tag{2.2.11}$$

即 (2.2.8) 成立.

(ii) 算子 $\sum\limits_{k=0}^{\infty} A^k$ 显然是线性的. 对任意 $x \in E$，由 (2.2.6) 及 (2.2.10) 得出

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{k=0}^{m} A^k x \right\| &\le \sum_{k=0}^{m} \|A^k x\| \le \sum_{k=0}^{m} \|A^k\| \, \|x\| \\ &\le \sum_{k=0}^{m} \|A\|^k \|x\| \le M\|x\|. \end{aligned} \tag{2.2.12}$$

而由 (2.2.11) 知道

$$\left\| \sum_{k=0}^{m} A^k x \right\| \to \left\| \sum_{k=0}^{\infty} A^k x \right\|. \tag{2.2.13}$$

由 (2.2.12) 及 (2.2.13) 得

$$\left\| \sum_{k=0}^{\infty} A^k x \right\| \le M\|x\|.$$

这式说明算子 $\sum\limits_{k=0}^{\infty} A^k$ 是有界的.

(iii) 对于任意 $x \in E$ 有

$$(I - A) \sum_{k=0}^{m} A^k x = \sum_{k=0}^{m} A^k x - \sum_{k=1}^{m+1} A^k x = x - A^{m+1} x,$$

于是

$$\begin{aligned} \left\| (I - A) \sum_{k=0}^{m} A^k x - x \right\| &= \|A^{m+1} x\| \\ &\le \|A\|^{m+1} \|x\| \to 0, 当m \to \infty. \end{aligned} \tag{2.2.14}$$

因为 $I-A$ 为线性有界算子, 所以 $I-A$ 也是连续算子, 由 (2.2.11) 得出

$$(I-A)\sum_{k=0}^{m} A^k x \to (I-A)\sum_{k=0}^{\infty} A^k x, \quad \text{当} m \to \infty. \qquad (2.2.15)$$

根据 (2.2.14) 及 (2.2.15) 知道

$$(I-A)\sum_{k=0}^{\infty} A^k x = x.$$

由于此式对任意 $x \in E$ 均成立, 从而得出

$$(I-A)\sum_{k=0}^{\infty} A^k = I.$$

这就证明了 $I-A$ 为可逆算子, 且 (2.2.9) 成立.

2.3 Hilbert 空间

定义 1 设 V 是线性空间. 如果对于任意两个元素 $x, y \in V$, 都有一个实数 $(x,y) \in R$ 与之对应, 且满足

1° (对称性) $(x,y) = (y,x), \quad \forall x, y \in V$;

2° (线性) $(ax+by, z) = a(x,z) + b(y,z)$, $\forall a, b \in R, \ x, y, z \in V$;

3° (正定性) 当 $0 \neq x \in V$ 时有 $(x,x) > 0$.

则称 (x,y) 为 V 的 **内积**. 线性空间 V 赋以内积后称为 **内积空间**. 在内积空间 V 中可以定义范数为

$$\|x\| = (x,x)^{\frac{1}{2}}, \quad \forall x \in V,$$

从而内积空间一定是线性赋范空间. 完备的内积空间又称为 Hilbert 空间.

例 1 n 维欧氏空间 R^n 关于内积

$$(x,y) = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n, \quad \forall x = (x_1, \cdots, x_n), y = (y_1, \cdots, y_n)$$

成为一个 Hilbert 空间.

例 2 设 Ω 为 R^n 中的一个区域. Ω 上平方可积函数类 $L^2(\Omega)$ 关于内积

$$(u,v)=\int_\Omega u(x)v(x)dx,\quad \forall u,v\in L^2(\Omega)$$

成为一个 Hilbert 空间.

Schwarz 不等式 对于内积空间中的任意两个元素 x 及 y 有

$$|(x,y)|\le ||x||\ ||y||,$$

式中当且仅当 x 与 y 线性相关时取等号.

证 若 x 与 y 线性相关，不妨设 $y=ax,a\in R$, 于是

$$\begin{aligned}|(x,y)|&=|(x,ax)|=|(ax,x)|=|a(x,x)|\\&=|a|\ |(x,x)|=|a|\ ||x||^2=||x||\ ||ax||=||x||\ ||y||.\end{aligned}$$

若 x 与 y 线性无关，则对于任意 $a\in R$ 有 $ax-y\neq 0$, 由内积的性质 3° 得

$$(ax-y,ax-y)>0.$$

再由性质 1° 及 2°, 上式可写成

$$a^2(x,x)-2a(x,y)+(y,y)>0,\quad \forall a\in R.$$

因此，左端关于 a 的二次三项式的判别式必为负值，即

$$(x,y)^2-(x,x)(y,y)<0.$$

由此得出

$$|(x,y)|<||x||\ ||y||.$$

容易证明，在内积空间 V 中有下面的 **平行四边形定律**:

$$||x+y||^2+||x-y||^2=2(||x||^2+||y||^2),\quad \forall x,y\in V.$$

利用 Schwarz 不等式，我们可以把欧氏空间中两个向量的夹角和正交（垂直）的概念推广到 Hilbert 空间中去.

定义 2 在 Hilbert 空间中，两个元素 x 与 y 的夹角 θ 定义为

$$\theta = \arccos \frac{(x,y)}{||x||\ ||y||},$$

或者说

$$\cos\theta = \frac{(x,y)}{||x||\ ||y||}.$$

如果 $(x,y)=0$, 则称 x 与 y**正交**, 记为 $x \perp y$.

由定义 2 知道，在 Hilbert 空间中，零元素与任意元素正交；一个元素与它自身正交，则此元素必定是零元素；如果元素 x 及 y 都与 z 正交，则 x 与 y 的线性组合也与 z 正交.

引理 2.3.1 设 D 是 Hilbert 空间 H 的稠密子集, 如果 $u \in H$ 满足

$$(u,v)=0, \quad \forall v \in D,$$

则 $u=0$.

证 因为 D 在 H 中稠密，对任一 $v \in H$, 存在序列 $\{v_k\} \subset D$, 使得 $||v_k - v|| \to 0$(当 $k \to \infty$). 因为 $\{v_k\} \subset D$, 由假设知 $(u,v_k)=0(k=1,2,\cdots)$. 于是有

$$|(u,v)| = |(u,v_k)-(u,v_k-v)| \le ||u||\ ||v_k - v|| \to 0(k \to \infty).$$

因此 $(u,v)=0$. 取 $v=u$ 得 $(u,u)=0$, 故 $u=0$.

定义 3 设 $\{\varphi_n\}$ 是 Hilbert 空间 H 中的序列（有限或无限), 且每一个 φ_n 都不是零元素.

(i) 如果 $\{\varphi_n\}$ 中任意两个元素都是正交的，则称 $\{\varphi_n\}$ 是一个 **正交组**.

(ii) 如果正交组 $\{\varphi_n\}$ 的所有元素 φ_n 的范数都是 1(即 $||\varphi_n||=1$), 则称 $\{\varphi_n\}$ 为 **规范正交组**.

(iii) 如果 $\{\varphi_n\}$ 是线性无关的，而且在 H 中除零元素外，不存在与 $\{\varphi_n\}$ 中所有 φ_n 都正交的元素，则称 $\{\varphi_n\}$ 为 **完全组** 或 **基底** 或 **坐标函数列**.

定理 2.3.2 Hilbert 空间中任一正交组是线性无关的.

证 设 $\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n$ 是所给正交组中任意有限个元素，今证明 $\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n$ 是线性无关的. 假定存在实数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$，使得

$$a_1\varphi_1 + a_2\varphi_2 + \cdots + a_n\varphi_n = 0,$$

此等式两端与 φ_1 做内积得出

$$a_1(\varphi_1, \varphi_1) + a_2(\varphi_2, \varphi_1) + \cdots + a_n(\varphi_n, \varphi_1) = 0,$$

因为 $\varphi_2, \cdots, \varphi_n$ 都与 φ_1 正交，上式变为

$$a_1(\varphi_1, \varphi_1) = 0.$$

但由 $\varphi_1 \neq 0$ 知 $(\varphi_1, \varphi_1) > 0$，所以有 $a_1 = 0$. 同理可证 $a_2 = \cdots = a_n = 0$. 这就证明了 $\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n$ 是线性无关的. 由 $\{\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n\}$ 在所给正交组中的任意性知道，原正交组也是线性无关的. 证完.

在 Hilbert 空间中，任意线性无关组都可以化成规范正交组. 事实上，对线性无关组 $\{x_n\}$，依次计算

$$
\begin{aligned}
& z_1 = \frac{x_1}{||x_1||}, & & \\
& y_2 = x_2 - (x_2, z_1)z_1, & & z_2 = \frac{y_2}{||y_2||}, \\
& y_3 = x_3 - (x_3, z_1)z_1 - (x_3, z_2)z_2, & & z_3 = \frac{y_3}{||y_3||}, \\
& \cdots\cdots & & \cdots\cdots \\
& y_n = x_n - \sum_{k=1}^{n-1}(x_n, z_k)z_k, & & z_n = \frac{y_n}{||y_n||}.
\end{aligned}
$$

这样得出的序列 $\{z_k\}$ 就是一个规范正交组，它与原来元素组 $\{x_k\}$ 是等价的(即对任意 $n = z_n$ 可以表成 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的线性组合，x_n 也可表成 $z_1, z_2, \cdots, z_n$ 的线性组合). 这个化线性无关组为规范正交组的方法叫做 **格拉姆 – 施密特 (Gram-Schimidt)) 正交化法** .

例如， Hilbert 空间 $L^2((-1,1))$ 中有一个线性无关组

$$1, x, x^2, \cdots, x^n, \cdots.$$

今用格拉姆 - 施密特正交化法把它化为规范正交组:

$$x_1 = 1, \|x_1\| = \sqrt{2}, z_1 = \frac{x_1}{\|x_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

$$x_2 = x, y_2 = x - (x, z_1)z_1 = x - \frac{1}{\sqrt{2}}\int_{-1}^{1}\frac{x}{\sqrt{2}}dx = x,$$

$$\|y_2\| = \left\{\int_{-1}^{1} x^2 dx\right\}^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{2}{3}}, z_2 = \frac{y_2}{\|y_2\|} = \sqrt{\frac{3}{2}}x.$$

$$x_3 = x^2, y_3 = x^2 - (x^2, z_1)z_1 - (x^2, z_2)z_2 = x^2 - \frac{1}{3},$$

$$\|y_3\| = \left\{\int_{-1}^{1}\left(x^2 - \frac{1}{3}\right)^2 dx\right\}^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{8}{45}},$$

$$z_3 = \frac{y_3}{\|y_3\|} = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{5}{2}}\left(x^2 - \frac{1}{3}\right).$$

$$x_4 = x^3,$$

$$y_4 = x^3 - (x^3, z_1)z_1 - (x^3, z_2)z_2 - (x^3, z_3)z_3 = x^3 - \frac{3}{5}x,$$

$$\|y_4\| = \left\{\int_{-1}^{1}\left(x^3 - \frac{3}{5}x\right)^2 dx\right\}^{\frac{1}{2}} = \frac{2}{5}\sqrt{\frac{2}{7}},$$

$$z_4 = \frac{y_4}{\|y_4\|} = \frac{5}{2}\sqrt{\frac{7}{2}}\left(x^3 - \frac{3}{5}x\right).$$

这样继续下去可得规范正交组 $\{z_k\}$ 如下：

$$\frac{1}{\sqrt{2}},\ \sqrt{\frac{3}{2}}x,\ \frac{3}{2}\sqrt{\frac{5}{2}}\left(x^2-\frac{1}{3}\right),\ \frac{5}{2}\sqrt{\frac{7}{2}}\left(x^3-\frac{3}{5}x\right),\ \cdots,$$

其中第 n 项为

$$z_n=\sqrt{\frac{2n-1}{2}}P_{n-1}(x)\quad(n=1,2,3,\cdots),$$

而 $P_k(x)$ 为勒让德 (Legendre) 多项式

$$P_k(x)=\frac{1}{2^k k!}\frac{d^k}{dx^k}(x^2-1)^k\quad(k=0,1,2,\cdots).$$

设 $\{x_n\}$ 是 Hilbert 空间中的规范正交基底， x 是 H 中的一个元素. 我们求解这样一个问题：在 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的所有线性组合

$$s_n=a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n$$

中，求出一个 s_n，使 $||x-s_n||$ 取得最小值. 由 $\{x_n\}$ 的规范正交性得出

$$\begin{aligned}||x-s_n||^2&=(x-s_n,x-s_n)=\left(x-\sum_{k=1}^n a_kx_k,x-\sum_{k=1}^n a_kx_k\right)\\&=(x,x)-2\sum_{k=1}^n a_k(x,x_k)+\sum_{k=1}^n a_k^2\\&=||x||^2+\sum_{k=1}^n[a_k-(x,x_k)]^2-\sum_{k=1}^n(x,x_k)^2.\end{aligned}$$

这个式子当

$$a_k=(x,x_k),\quad k=1,2,\cdots,n\tag{2.3.1}$$

时取最小值

$$||x-s_n||^2=||x||^2-\sum_{k=1}^n a_k^2,\tag{2.3.2}$$

而所求的 s_n 可表成

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k x_k = \sum_{k=1}^{n} (x, x_k) x_k. \tag{2.3.3}$$

我们称 (2.3.1) 为 x 关于规范正交基底 $\{x_n\}$ 的 **傅里叶 (Fourier) 系数**.

由 (2.3.2) 得出 **贝塞耳 (Bessel) 不等式**

$$\sum_{k=1}^{n} (x, x_k)^2 = \sum_{k=1}^{n} a_k^2 \leq ||x||^2.$$

由此不等式可知，级数

$$\sum_{k=1}^{\infty} (x, x_k)^2 = \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 \tag{2.3.4}$$

是收敛的，且

$$\sum_{k=1}^{\infty} (x, x_k)^2 = \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 \leq ||x||^2,$$

此不等式也称为 **贝塞耳不等式**.

由于基底 $\{x_n\}$ 的规范正交性，当 $m > n$ 时，利用商高定理及级数 (2.3.4) 的收敛性得出

$$||s_m - s_n||^2 = \left\| \sum_{k=n+1}^{m} a_k x_k \right\|^2 = \sum_{k=n+1}^{m} ||a_k x_k||^2$$

$$= \sum_{k=n+1}^{m} a_k^2 \to 0, \quad 当m \to \infty.$$

即 $\{s_n\}$ 是 Hilbert 空间中的一个 Cauchy 序列，因此在 H 中有极限元素

$$s = \lim_{n \to \infty} s_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k. \tag{2.3.5}$$

我们将证明 $x=s$. 现证明 $x-s$ 与所有 $x_k(k=1,2,\cdots)$ 正交. 对 $n>k$ 有

$$\begin{aligned}(x-s,x_k)&=(x,x_k)-(s,x_k)=a_k-(s-s_n,x_k)-(s_n,x_k)\\&=a_k-(s-s_n,x_k)-a_k=-(s-s_n,x_k).\end{aligned}$$

由此，根据 Schwarz 不等式得出

$$|(x-s,x_k)|\le\|s-s_n\|\,\|x_k\|=\|s-s_n\|\to 0,\quad 当n\to\infty.$$

于是有

$$(x-s,x_k)=0,k=1,2,3,\cdots.$$

由于 $\{x_n\}$ 是完全组，故 $x-s=0$, 即 $x=s$.

由于 $x=s$, (2.3.5) 可写成

$$x=\sum_{k=1}^{\infty}a_kx_k=\sum_{k=1}^{\infty}(x,x_k)x_k=\lim_{n\to\infty}s_n, \tag{2.3.6}$$

级数

$$\sum_{k=1}^{\infty}a_kx_k=\sum_{k=1}^{\infty}(x,x_k)x_k$$

称为 x 关于规范正交基底 $\{x_n\}$ 的 **正交级数** 或 **Fourier 级数**. 在 (2.3.2) 两端令 $n\to\infty$, 得出 Parseval 等式

$$\|x\|^2=\sum_{k=1}^{\infty}a_k^2=\sum_{k=1}^{\infty}(x,x_k)^2. \tag{2.3.7}$$

上面的论证可归结为如下定理.

定理 2.3.3 对 Hilbert 空间中的规范正交基底 $\{x_n\}$, H 中的每一元素 x 都可以展开成 $\{x_n\}$ 的 Fourier 级数

$$x=\sum_{k=1}^{\infty}(x,x_k)x_k, \tag{2.3.8}$$

且成立 Parseval 等式

$$\sum_{k=1}^{\infty}(x, x_k)^2 = ||x||^2. \tag{2.3.9}$$

例如，平方可积函数类 $L^2((-\pi, \pi))$ 中有规范正交基底

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos 2x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin 2x}{\sqrt{\pi}}, \cdots .$$

因此，所有平方可积函数 $f(x)$ 都可以展开成这个基底的 Fourier 级数

$$f(x) = \frac{a_0}{\sqrt{2\pi}} + \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

其中

$$a_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx,$$

$$a_k = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kxdx,$$

$$b_k = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kxdx.$$

此时， Parseval 等式为

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k^2 + \sum_{k=1}^{\infty} b_k^2 = \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx.$$

2.4 Riesz 表示定理

对 Hilbert 空间 H 的一个子集合 M, 集合

$$M^{\perp} = \{x \in H | (x, y) = 0, \ \forall y \in M\}$$

称为 M 的 **正交补空间**.

引理 2.4.1 若 $M\subset H$, 则 $M^{\perp}$ 是 H 的闭子空间, 且 $M\bigcap M^{\perp}=\{0\}$.

证 $M^{\perp}$ 显然是 H 的线性子空间. 今证明 $M^{\perp}$ 是闭的. 设 $\{x_n\}\subset M^{\perp}, x\in H, \|x_n-x\|\to 0$, 则

$$(x_n,y)=0,\quad \forall y\in M.$$

由此知

$$\begin{aligned}|(x,y)|&=|(x_n,y)-(x,y)|=|(x_n-x,y)|\\&\le \|x_n-x\|\,\|y\|\to 0.\end{aligned}$$

从而有

$$(x,y)=0,\quad \forall y\in M,$$

即 $x\in M^{\perp}$, 因而 $M^{\perp}$ 是闭的. 若 $x\in M\bigcap M^{\perp}$, 则由 $M^{\perp}$ 的定义知 $(x,x)=0$. 因而 $x=0$, 这就证明了 $M\bigcap M^{\perp}=\{0\}$.

定理 2.4.2 若 M 是 Hilbert 空间 H 的闭子空间. 则 H 中的每一元素 x 均可唯一地表成下列形状:

$$x=y+z,\quad y\in M,\quad z\in M^{\perp}. \tag{2.4.1}$$

证 设 $x\in H$, 以

$$d=\text{dist}(x,M)=\inf_{u\in M}\|u-x\|$$

表示 x 与集合 M 的距离, 则存在的序列 $\{y_k\}\subset M$ 使得

$$\|y_k-x\|\to d.$$

由平行四边形定律有

$$\begin{aligned}&\|y_l-x+y_m-x\|^2+\|(y_l-x)-(y_m-x)\|^2\\&=2(\|y_l-x\|^2+\|y_m-x\|^2).\end{aligned}$$

由 $\dfrac{y_l+y_m}{2}\in M$ 及 d 的定义知道

$$\|y_l-x+y_m-x\|=2\left\|\frac{y_l+y_m}{2}-x\right\|\ge 2d.$$

由上面两个式子得出

$$(2d)^2 + ||y_l - y_m||^2 \le 2(||y_l - x||^2 + ||y_m - x||^2) \to 4d^2.$$

于是有 $||y_l - y_m|| \to 0$, 当 $l, m \to \infty$, 即 $\{y_k\}$ 为 H 中的 Cauchy 序列, 而 M 为 H 的闭子空间, 因而存在 $y \in M$ 使得 $||y_k - y|| \to 0$. 这样一来, 就有

$$\begin{aligned} d \le ||y - x|| &= ||(y_k - x) - (y_k - y)|| \\ &\le ||y_k - x|| + ||y_k - y|| \to d + 0. \end{aligned}$$

由此得出 $||y - x|| = d$. 记 $z = x - y$, 则 $x = y + z$. 需证 $z \in M^{\perp}$. 对任意 $0 \ne v \in M, a \in R$, 有 $y + av \in M$, 因而

$$||z - av||^2 = ||x - (y + av)||^2 \ge d^2.$$

注意到 $||z|| = d$, 由上式得

$$-2a(z, v) + a^2||v||^2 \ge 0.$$

取 $a = \dfrac{(z, v)}{||v||^2}$, 代入上式得出

$$-\frac{|(z, v)|^2}{||v||^2} \ge 0,$$

由此得 $(z, v) = 0$, 这就证明了 $z \in M^{\perp}$.

最后证明表示法 (2.4.1) 是唯一的. 若还有 $x = y_1 + z_1, y_1 \in M, z_1 \in M^{\perp}$, 则由引理 2.4.1 有

$$y - y_1 = z_1 - z \in M \bigcap M^{\perp} = \{0\},$$

因此 $y = y_1, z = z_1$. 证完.

定理中的 y 及 z 分别称为 x 在子空间 M 及 $M^{\perp}$ 上的 **投影**.

对于 Hilbert 空间 H, 设固定 $y \in H$, 则内积

$$f(x) = (x, y)$$

显然是 H 上的线性泛函，且由

$$|f(x)| = |(x,y)| \leq ||y||\ ||x||, \forall x \in H$$

知道泛函 f 是有界的，且 $||f|| \leq ||y||$. 反过来，Hilbert 空间中的线性有界泛函都可以用内积来表示，这就是下面的 Riesz 表示定理.

定理 2.4.3(Riesz F) 对于 Hilbert 空间 H 上的每一个线性有界泛函 f, 存在唯一的元素 $y \in H$ 使得

$$f(x) = (x,y), \quad \forall x \in H. \tag{2.4.2}$$

证 线性有界泛函 f 的核 (零空间)

$$K = \{x \in H | f(x) = 0\}$$

为 H 的闭子空间. 若 $K = H$, 则对 $y = 0$ 有 (2.4.2). 若 $K \neq H$, 则 $K^{\perp} \neq \{0\}$. 任意取定 $u \in K^{\perp}, ||u|| = 1$, 则对任意 $z \in K^{\perp}$ 有 $f(u)z - f(z)u \in K^{\perp}$, 且

$$f(f(u)z - f(z)u) = f(u)f(z) - f(z)f(u) = 0.$$

于是 $f(u)z - f(z)u \in K \bigcap K^{\perp} = \{0\}$, 从而 $z = au, a = \dfrac{f(z)}{f(u)}$. 这就证明了 $K^{\perp} = \{au | a \in R\}$ 是一维的. 因此任意元素 $x \in H$ 可表成

$$x = v + au, \quad v \in K, \quad u \in K^{\perp}, a \in R.$$

由此知

$$\begin{aligned} f(x) \quad &= f(v + au) = f(v) + af(u) = af(u) \\ &= (v + au, f(u)u) = (x, f(u)u), \end{aligned}$$

即 (2.4.2) 对于 $y = f(u)u$ 成立，如果再有

$$f(x) = (x, y_1), \quad \forall x \in H,$$

则由此式与 (2.4.2) 得

$$(x, y-y_1)=0, \quad \forall x \in H$$

式中取 $x=y-y_1$ 得 $(y-y_1, y-y_1)=0$, 于是 $y-y_1=0$, 即 $y=y_1$. 这就说明了表示法 (2.4.2) 是唯一的.

2.5 Fredholm 定理

设 B 是一个 Banach 空间, $T: B \to B$ 是线性紧算子, 则有下列 Fredholm 定理, 它是线性代数方程组理论的推广.

定理 2.5.1 设 B 是 Banach 空间, $T: B \to B$ 是线性紧算子, 如果齐次方程

$$x+Tx=0 \tag{2.5.1}$$

只有零解 $x=0$, 则非齐次方程

$$x+Tx=y \tag{2.5.2}$$

对每一 $y \in B$ 有唯一的解 $x \in B$, 即 $(I+T)^{-1}$ 存在, 且 $(I+T)^{-1}$ 为 $B \to B$ 的有界算子 (I 为 B 中的恒等算子).

记 $S=I+T$. 于是, 定理中关于方程 (2.5.1) 只有零解这一条件可以改写成

$$\text{如果} \quad Sx=0, \quad \text{则} \quad x=0. \tag{2.5.3}$$

为了证明定理 2.5.1, 需要先证明下列三个引理.

引理 2.5.2 B 是 Banach 空间, A 是 B 的真闭子空间, 则存在 $x \in B$ 满足

$$\|x\|=1, \operatorname{dist}(x, A)=\inf_{y \in A}\|x-y\|>\frac{1}{2}. \tag{2.5.4}$$

证 设 $z \in B \backslash A$. 因 A 是 B 的真闭子空间, 所以有

$$\operatorname{dist}(z, A)=\inf_{y \in A}\|z-y\|=d>0.$$

从而存在 $w \in A$ 使得

$$||z-w|| < 2d.$$

命 $x=\dfrac{z-w}{||z-w||}$, 则 $||x||=1$, 且对任意 $y\in A$, 由于 $w+||z-w||y\in A$, 有

$$||x-y|| = \frac{||z-w-||z-w||y||}{||z-w||} \geq \frac{d}{||z-w||} > \frac{1}{2}.$$

这就证明了引理的结论 (2.5.4) 成立.

引理 2.5.3 在定理 2.5.1 的条件下，存在常数 $K>0$, 使得

$$||x|| \leq K||Sx||, \quad \forall x \in B. \tag{2.5.5}$$

证 假若 (2.5.5) 不成立，则存在 $\{x_n\} \subset B$ 使得

$$\frac{||x_n||}{||Sx_n||} \to \infty, \quad 当 n \to \infty. \tag{2.5.6}$$

对所有 n, 不妨假定 $x_n \neq 0$, 记 $z_n = \dfrac{x_n}{||x_n||}$, 则 $||z_n||=1$, 且

$$||Sz_n|| = \frac{||Sx_n||}{||x_n||} \to 0, \text{ 当 } n \to \infty. \tag{2.5.7}$$

因 T 为紧算子，故 $\{Tz_n\}$ 为列紧集，它有收敛的子序列. 仍以 $\{Tz_n\}$ 表示 $\{Tz_n\}$ 的收敛子序列，并设

$$Tz_n \to y, 当 \ n \to \infty. \tag{2.5.8}$$

由 $Sz_n=(I+T)z_n=z_n+Tz_n$, 利用 (2.5.7) 及 (2.5.8) 得

$$z_n = Sz_n - Tz_n \to -y, \text{ 当 } n \to \infty. \tag{2.5.9}$$

因为线性紧算子 T 是连续的，故算子 $S=I+T$ 也是连续算子，由 (2.5.9) 可得

$$Sz_n \to S(-y) = -Sy, \text{ 当 } n \to \infty.$$

将此式与 (2.5.7) 对照可知

$$Sy = 0.$$

由此，根据 (2.5.3) 得出 $y = 0$, 于是 (2.5.9) 可以改写成

$$z_n \to 0, \text{当} \quad n \to \infty.$$

此式与 $||z_n|| = 1, \ \forall \ n$ 矛盾.

引理 2.5.4 设 V 是 Banach 空间 B 的闭子空间，以

$$S(V) = \{Sx | x \in V\}$$

表示算子 S 关于 V 的值域. 在定理 2.5.1 的假设下, 如果 $S(V) \subset V$, 则 $S(V)$ 是 V 的闭子空间.

证 设 $\{Sx_n\}$ 是 $S(V)$ 中任一 Cauchy 序列, 其中 $\{x_n\} \subset V$, 需证明 $\{Sx_n\}$ 的极限元素仍属于 $S(V)$. 由 $S(V) \subset V$ 知 $\{Sx_n\} \subset V$, 根据 V 是 B 的闭子空间，从而存在 $y \in V$ 使得

$$Sx_n \to y, \quad \text{当} \quad n \to \infty. \tag{2.5.10}$$

因此，只需证 $y \in S(V)$. 由 (2.5.10) 知道序列 $\{Sx_n\}$ 有界，设 $||Sx_n|| \le M, \forall n$, 由引理 2.5.3 得

$$||x_n|| \le K||Sx_n|| \le KM, \forall n,$$

即序列 $\{x_n\}$ 有界. 因 T 为紧算子，故 $\{Tx_n\}$ 在 B 中有收敛的子序列，将 $\{Tx_n\}$ 的一个收敛子序列仍记为 $\{Tx_n\}$, 由于 $Tx_n = Sx_n - x_n \in V$, 而 V 是闭子空间，故 $\{Tx_n\}$ 的极限元素 $z \in V$, 即有

$$Tx_n \to z, \quad \text{当} \, n \to \infty. \tag{2.5.11}$$

由 (2.5.10) 及 (2.5.11) 得出

$$x_n = Sx_n - Tx_n \to y - z, \quad \text{当} \, n \to \infty.$$

由此式及算子 S 的连续性知道

$$Sx_n \to S(y-z), \quad 当n \to \infty. \tag{2.5.12}$$

因为 $y-z \in V$, 比较 (2.5.10) 及 (2.5.12) 得出

$$y = S(y-z) \in S(V).$$

定理 2.5.1 的证明 记 $R_0 = B, R_j = S^j(B) = S(R_{j-1}), j = 1, 2, \cdots$. 由引理 2.5.4 知道, $R_1, R_2, \cdots$ 都是闭子空间, 且

$$R_0 = B \supset R_1 \supset R_2 \supset \cdots \supset R_j \supset R_{j+1} \supset \cdots . \tag{2.5.13}$$

我们先证明在上面的序列 $\{R_j\}$ 中必有两个相邻的子空间是相同的, 即存在 $j \geq 0$ 使得

$$R_j = R_{j+1}. \tag{2.5.14}$$

相反地, 假如对所有 $j = 0, 1, 2, \cdots$, (2.5.14) 都不成立, 即序列 (2.5.13) 中的每一个 R_{j+1} 都是其前一个 R_j 的真闭子空间 $(j + 0, 1, 2, \cdots)$, 则由引理 2.5.2 知道, 存在 $y_j \in R_j$ 使得

$$\|y_j\| = 1, \mathrm{dist}(y_j, R_{j+1}) > \frac{1}{2}(j = 0, 1, 2, \cdots). \tag{2.5.15}$$

当 $i > j$ 时有

$$Ty_i - Ty_j = y_j - y_i + Sy_i - Sy_j = y_j - y,$$

其中

$$y = y_i - Sy_i + Sy_j \in R_{j+1}.$$

因此, 由 (2.5.15) 得出

$$\|Ty_i - Ty_j\| = \|y_j - y\| \geq \mathrm{dist}(y_j, R_{j+1}) > \frac{1}{2}.$$

此式说明序列 $\{Ty_i\}$ 没有收敛的子序列, 这就与 $\|y_j\| = 1(j = 0, 1, 2, \cdots)$ 及 T 是紧算子相矛盾.

设 (2.5.14) 成立. 对任意 $y \in B$, 由 R_j 的定义及 (2.5.14) 得

$$S^j y \in R_j = R_{j+1}.$$

此式说明存在 $x \in B$ 使得 $S^j y = S^{j+1} x$, 即

$$S^j(Sx - y) = 0.$$

由此，应用条件 (2.5.3) 依次得

$$S^{j-1}(Sx - y) = 0,$$

$$S^{j-2}(Sx - y) = 0,$$

$$\cdots\cdots$$

$$Sx - y = 0.$$

这就证明了方程 (2.5.2)(因为 $S = I + T$) 对任意 $y \in B$ 有解 $x \in B$. 再由条件 (2.5.3) 知道方程 (2.5.2) 的解是唯一的, 因此 $S^{-1} = (E + T)^{-1}$ 存在.

对任意 $y \in B$, 设 x 为方程 (2.5.2) 的解，即

$$Sx = y \quad 或 \quad x = S^{-1} y.$$

再由 (2.5.5) 得

$$\|S^{-1} y\| = \|x\| \leq K \|Sx\| = K \|y\|,$$

这就证明了算子 $S^{-1} = (I + T)^{-1}$ 的有界性.

2.6 Sobolev 空间 $W_0^{1,2}(\Omega)$

设 Ω 为 n 维有界区域.

引理 2.6.1 对函数集合

$$B_0^1 = \{u \in C^1(\Omega) \bigcap C^0(\overline{\Omega}) | u = 0 \text{ 在} \partial\Omega \text{上}\}$$

有下面的 **Friedrichs** 不等式(也称为 **Poincaré** 不等式)

$$\int_\Omega u^2dx \le C\int_\Omega |Du|^2dx,\quad \forall u\in B_0^1,$$

即

$$||u||_2 \le C||Du||_2,\quad \forall u\in B_0^1,$$

其中 C 是与 u 无关而只与 Ω 有关的常数.

证 n 维有界区域 Ω 必包含在棱平行于坐标轴的 n 维正立方体 Q 中，设

$$\Omega\subset Q=\{x=(x_1,\cdots,x_n)|a_i\le x_i\le a_i+h, i=1,2,\cdots,n\}.$$

在 $Q\backslash\Omega$ 中令 $u=0$, 对任意 $x\in Q$ 有

$$\begin{aligned}u(x)&=u(x_1,x_2,\cdots,x_n)-u(a_1,x_2,\cdots,x_n)\\&=\int_{a_1}^{x_1}D_1u(t,x_2,\cdots,x_n)dt.\end{aligned}$$

由此，利用 Schwarz 不等式得出

$$\begin{aligned}|u(x)|^2&\le\left(\int_{a_1}^{x_1}D_1u(t,x_2,\cdots,x_n)dt\right)^2\\&\le\left(\int_{a_1}^{a_1+h}|D_1u(x)|dx_1\right)^2\\&\le\left(\int_{a_1}^{a_1+h}dx_1\right)\left(\int_{a_1}^{a_1+h}|D_1u(x)|^2dx_1\right)\\&=h\int_{a_1}^{a_1+h}|D_1u(x)|^2dx_1.\end{aligned}$$

在 Q 上积分上式得

$$\int_\Omega |u(x)|^2 dx$$

$$\leq h \int_{a_1}^{a_1+h} \cdots \int_{a_n}^{a_n+h} \left(\int_{a_1}^{a_1+h} |D_1 u(x)|^2 dx_1 \right) dx_1 dx_2 \cdots dx_n$$

$$= h^2 \int_Q |D_1 u(x)|^2 dx.$$

因为在 Ω 外有 $u=0$, 故由上式推出

$$\int_\Omega |u(x)|^2 dx \leq h^2 \int_\Omega |D_1 u(x)|^2 dx \leq h^2 \int_\Omega |Du(x)|^2 dx.$$

证完.

空间 $C_0^1(\Omega)$ 关于内积

$$[u,v] = \int_\Omega Du \cdot Dv dx \tag{2.6.1}$$

成为一个内积空间，特别地，它关于范数

$$||u||_{1,2} = ||u||_{1,2,\Omega} = [u,v]^{\frac{1}{2}} = \left(\int_\Omega |Du|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \tag{2.6.2}$$

是一个线性赋范空间.

定义 空间 $C_0^1(\Omega)$ 关于范数 (2.6.2) 完备化得到的 Hilbert 空间记为 $W_0^{1,2}(\Omega)$ 或 $H_0^1(\Omega)$, 叫做 **Sobolev 空间**.

由定义知道, 对任意 $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$, 存在序列 $\{u_k\} \subset C_0^1(\Omega)$ 使得

$$||u_k - u||_{1,2} \to 0, \quad 当 k \to \infty.$$

对 $u_k - u_l \in C_0^1(\Omega)$, 利用 Friedrichs 不等式得

$$||u_k - u_l||_2 \leq C||u_k - u_l||_{1,2} \to 0, \quad 当 k \to \infty, l \to \infty. \tag{2.6.3}$$

因此，由于 $L^2(\Omega)$ 是完备空间， u_k 在 $L^2(\Omega)$ 中必收敛于一个仍属于 $L^2(\Omega)$ 的函数，这个极限函数就是 u. 再由范数定义 (2.6.2) 得出：对 $i=1,2,\cdots,n$ 均有

$$\begin{aligned}||D_iu_k-D_iu_l||_2 &\le \left(\int_\Omega |Du_k-Du_l|^2dx\right)^{\frac{1}{2}}\\ &= ||u_k-u_l||_{1,2}\to 0 \text{当} k\to\infty, l\to\infty.\end{aligned}$$

因此 D_iu_k 在 $L^2(\Omega)$ 中收敛于一个函数 $v_i\in L^2(\Omega)$, v_i 称为 u 的**广义导数**或**弱导数**, 并记为 $v_i=D_iu$. 这就证明了

$$\begin{aligned}&u_k\to u, &&\text{在}L^2(\Omega)\text{中，当}k\to\infty\\ &D_iu_k\to D_iu, &&\text{在}L^2(\Omega)\text{中，当}k\to\infty\\ & &&(i=1,2,\cdots,n).\end{aligned}\tag{2.6.4}$$

也就是说， $W_0^{1,2}(\Omega)$ 中的元素是属于 $L^2(\Omega)$ 且具有所有一阶弱导数 (也属于 $L^2(\Omega)$) 的函数.

引理 2.6.2 对 $u\in W_0^{1,2}(\Omega)$ 有下面的 Friedrichs 不等式

$$\int_\Omega u^2dx\le C\int_\Omega |Du|^2dx,\tag{2.6.5}$$

即

$$||u||_2\le C||Du||_2,\tag{2.6.6}$$

其中 C 是与 u 无关而只与 Ω 有关的常数.

证 对 $u\in W_0^{1,2}(\Omega)$, 存在 $\{u_k\}\in C_0^1(\Omega)$, 且 $u\in L^2(\Omega)$, $D_iu\in L^2(\Omega)$ 使得 (2.6.4) 成立，因此有

$$\begin{aligned}&||u_k||_2\to ||u||_2, \quad \text{当}k\to\infty,\\ &||D_iu_k||_2\to ||D_iu||_2, \quad \text{当}k\to\infty(i=1,2,\cdots,n),\end{aligned}\tag{2.6.7}$$

由此知

$$||Du_k||_2=\left(\sum_{i=1}^n ||D_iu_k||_2^2\right)^{\frac{1}{2}}\to\left(\sum_{i=1}^n ||D_iu||_2^2\right)^{\frac{1}{2}}=||Du||_2, \text{当}k\to\infty.\tag{2.6.8}$$

由 $u_k \in C_0^1(\Omega) \subset B_0^1$, 根据引理 2.6.1 得

$$||u_k||_2 \leq C||Du_k||_2.$$

对此式两端令 $k \to \infty$ 得出不等式 (2.6.6).

定理 2.6.3 $W_0^{1,2}(\Omega)$ 中的有界集在 $L^2(\Omega)$ 中为列紧集.

证 由定理 2.1.2 及 $C_0^1(\Omega)$ 在 $W_0^{1,2}(\Omega)$ 的稠密性知道, 只需对任意 $u \in C_0^1(\Omega)$ 证明不等式

$$\int_\Omega |u(x+h)-u(x)|^2 dx \leq ||u||_{1,2}^2 |h|^2, \tag{2.6.9}$$

其中当 $x \in R^n \backslash \Omega$ 时视 $u(x)=0$. 利用 Schwarz 不等式有

$$|u(x+h)-u(x)|^2 = \left|\int_0^1 \frac{d}{dt}u(x+th)dt\right|^2$$

$$= \left|\int_0^1 \sum_{i=1}^n D_i u(x+th)h_i dt\right|^2 \leq \left(\int_0^1 |Du(x+th)||h|dt\right)^2$$

$$\leq \int_0^1 |Du(x-th|^2 dt \int_0^1 |h|^2 dt = h^2 \int_0^1 |Du(x+th)|^2 dt.$$

对此式两端在 Ω 上积分得

$$\int_\Omega |u(x+h)-u(x|^2 dx \leq h^2 \int_\Omega \int_0^1 |Du(x+th)|^2 dt dx$$

$$\leq h^2 \int_0^1 \int_\Omega |Du(x+th)|^2 dx dt \leq h^2 \int_0^1 \int_\Omega |Du(y)|^2 dy dt$$

$$= h^2 \int_0^1 ||Du||_2^2 dt = ||u||_{1,2}^2 |h|^2.$$

第三章 泛函极小问题与线性微分方程

在第一章中，我们证明了在函数类

$$B^2 = \{u \in C^2(\Omega)\bigcap C^1(\overline{\Omega})|u = g \text{ 在 } \partial\Omega \text{ 上}\}$$

中求解 Poisson 方程 Dirichlet 问题

$$\begin{cases} -\Delta u = f, & \text{在}\Omega\text{中}, \\ u = g, & \text{在}\partial\Omega\text{上} \end{cases} \tag{3.0.1}$$

可化为对泛函

$$I(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |Du|^2 dx - \int_\Omega fudx$$

求极小的变分问题.

对于微分方程边值问题 (3.0.1), 取一个满足边界条件的已知函数 u_0, 即 $u_0 = g$ 在 $\partial\Omega$ 上. 令 $v = u - u_0$, 则问题 (3.0.1) 变成

$$\begin{cases} \Delta v = f + \Delta u_0 = \bar{f}, & \text{在 } \Omega \text{ 中}, \\ v = 0, & \text{在 } \partial\Omega \text{ 上}, \end{cases}$$

此问题中，边界条件右端的已知函数为 0, 称为齐次边界条件. 为了论证的简便，今后对微分方程边值问题，通常假定其边界条件是齐次的.

本章首先证明，相当多的一类线性微分方程的线性边值问题都可以化为泛函求极小的变分问题. 然后论证这一类变分问题的可解性，讨论二阶自共轭椭圆方程的特征值问题. 最后介绍解泛函极小问题的古典近似方法： Riesz 方法与 Galerkin 方法.

3.1 正算子与二次泛函极小问题

以后均假设 H 是 (实)Hilbert 空间, D_A 是 H 的一个稠密线性子空间, A 是 D_A 到 H 中的线性算子 (不必是有界的).

定义 1 如果算子 A 满足

$$(Au, v) = (u, Av), \quad \forall u, v \in D_A,$$

则称 A 为 D_A 上的 **对称算子**.

定义 2 设 A 是 D_A 上的对称算子. 如果算子 A 满足

$$(Au, u) > 0, \quad \forall 0 \neq u \in D_A,$$

则称 A 为 D_A 上的 **正算子**. 如果存在正常数 γ 使得

$$(Au, u) \geq \gamma^2 ||u||^2, \quad \forall u \in D_A, \tag{3.1.1}$$

则称 A 为 D_A 上的 **正定算子**.

例 1 设有界区域 Ω 有 C^1 边界 $\partial\Omega, H = L^2(\Omega)$. 由于

$$D_A = \{u \in C^2(\overline{\Omega}) | u = 0 在 \partial\Omega 上\},$$

在 $C_0^\infty(\Omega)$ 中稠密 (参阅 Adams[9] 定理 2.19), 而

$$C_0^\infty(\Omega) \subset D_A \subset L^2(\Omega),$$

所以 D_A 在 $L^2(\Omega) = H$ 中稠密. 今证 $A = -\triangle$ 是 D_A 上的正定算子.

证 $A = -\triangle$ 显然是 D_A 上的线性算子. 当 $u, v \in D_A$ 时, 由 Green 公式有

$$\int_\Omega v \triangle u dx + \int_\Omega Du \cdot Dv dx = \int_{\partial\Omega} v \frac{\partial u}{\partial n} ds, \tag{3.1.2}$$

$$\int_\Omega u \triangle v dx + \int_\Omega Du \cdot Dv dx = \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial v}{\partial n} ds, \tag{3.1.3}$$

其中 n 为外法向量单位. 将上列两式相减得第二 Green 公式

$$\int_{\Omega}(v\triangle u-u\triangle v)dx=\int_{\partial\Omega}\left(v\frac{\partial u}{\partial n}-u\frac{\partial v}{\partial n}\right)ds, \qquad (3.1.4)$$

由于在 $\partial\Omega$ 上有 $u=v=0$, 上式可写成

$$\int_{\Omega}v\triangle udx=\int_{\Omega}u\triangle vdx$$

或

$$(-\triangle u,v)=(u,-\triangle v).$$

这个式子说明 $A=-\triangle$ 是 D_A 上的对称算子. 再由 (3.1.2) 及 Friedrichs 不等式得出: 对任意 $u\in D_A$ 有

$$\begin{aligned}(Au,u)&=(-\triangle u,u)=-\int_{\Omega}u\triangle udx\\&=\int_{\Omega}|Du|^2dx\geq\gamma^2\int_{\Omega}u^2dx=\gamma^2\|u\|_2^2,\end{aligned}$$

其中 $\gamma>0$. 上式说明是 $A=-\triangle$ 是 D_A 上的正定算子.

例 2 在法向力作用下, 弹性薄平板的弯曲方程为

$$\triangle^2w\equiv\frac{\partial^4w}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4w}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4w}{\partial y^4}=\frac{q(x,y)}{D},\quad 在\partial\Omega上, \qquad (3.1.5)$$

其中 Ω 是平板所占有的二维区域, 它有 C^1 边界 $\partial\Omega, w$ 为平板的挠度 (法向位移), q 为法向荷载强度, D 是平板的柱形刚度, 它是由平板的厚度及材料本身确定的常数. 如果平板的边界是刚性固定的, 则对应的边界条件是

$$\begin{aligned}&w=0, &&在\partial\Omega上,\\&\frac{\partial w}{\partial n}=0, &&在\partial\Omega上,\end{aligned} \qquad (3.1.6)$$

其中 n 为外法向单位向量. 取 $H=L^2(\Omega)$, 命

$$D_A=\{w\in C^4(\overline{\Omega})|w满足条件(3.1.6)\}.$$

双调和算子 $\triangle^2$ 显然是 D_A 上的线性算子. 对任意 $w, v \in D_A$, 在 Green 公式 (3.1.2) 及 (3.1.3) 中取 $u = \triangle w$ 得出

$$\int_\Omega v \triangle^2 w dxdy + \int_\Omega D(\triangle w) \cdot Dv dxdy = \int_{\partial\Omega} v \frac{\partial(\triangle w)}{\partial n} ds = 0,$$

$$\int_\Omega \triangle w \triangle v dxdy + \int_\Omega D(\triangle w) \cdot Dv dxdy = \int_{\partial\Omega} \triangle w \frac{\partial v}{\partial n} ds = 0.$$

比较这两个式子得

$$\int_\Omega v \triangle^2 w dxdy = \int_\Omega \triangle w \triangle v dxdy = \int_\Omega w \triangle^2 v dxdy, \qquad (3.1.7)$$

这就证明了算子 $\triangle^2$ 是 D_A 上的对称算子. 由 (3.1.7) 又有

$$(\triangle^2 w, w) = \int_\Omega w \triangle^2 w dxdy = \int_\Omega (\triangle w)^2 dxdy \geq 0.$$

如果 $(\triangle^2 w, w) = 0$, 则由上式推出

$$\triangle w = 0, \quad \text{在}\Omega\text{中},$$

由此及边界条件 (3.1.6) 知道 $w = 0$. 这就证明了算子 $\triangle^2$ 是 D_A 上的正算子.

我们还可以进一步证明双调和算子 $\triangle^2$ 是 D_A 上的正定算子. 由边界条件 (3.1.6) 得出

$$-\frac{\partial w}{\partial x}\cos(n,y) + \frac{\partial w}{\partial y}\cos(n,x) = \frac{\partial w}{\partial x}\cos(s,x) + \frac{\partial w}{\partial y}\cos(s,y)$$

$$= \frac{\partial w}{\partial s} = 0, \quad \text{在}\partial\Omega\text{上},$$

$$\frac{\partial w}{\partial x}\cos(n,x) + \frac{\partial w}{\partial y}\cos(n,y) = \frac{\partial w}{\partial n} = 0, \quad \text{在}\partial\Omega\text{上}.$$

由此二式知道

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial y} = 0, \quad \text{在}\partial\Omega\text{上}.$$

利用此式及边界条件 (3.1.6), 分部积分两次可得

$$\int_\Omega \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}dxdy = -\int_\Omega \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial^3 w}{\partial x\partial y^2}dxdy = \int_\Omega \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right)^2 dxdy.$$

因此，由 (3.1.7) 得出

$$\begin{aligned}(\triangle^2 w, w) &= \int_\Omega (\triangle w)^2 dxdy \\ &= \int_\Omega \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)^2\right] dxdy \\ &= \int_\Omega \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)^2\right] dxdy\end{aligned} \tag{3.1.8}$$

对 $w, \dfrac{\partial w}{\partial x}, \dfrac{\partial w}{\partial y}$ 分别利用 Friedrichs 不等式得出

$$\int_\Omega w^2 dxdy \le C\int_\Omega \left[\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2\right] dxdy, \tag{3.1.9}$$

$$\int_\Omega \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 dxdy \le C\int_\Omega \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right)^2\right] dxdy, \tag{3.1.10}$$

$$\int_\Omega \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 dxdy \le C\int_\Omega \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)^2\right] dxdy, \tag{3.1.11}$$

由 (3.1.9),(3.1.10),(3.1.11) 及 (3.1.12) 推出

$$\begin{aligned}\int_\Omega w^2 dxdy &\le C\int_\Omega \left[\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2\right] dxdy \\ &\le C^2\int_\Omega \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)^2\right] dxdy \\ &= C^2(\triangle^2 w, w).\end{aligned}$$

由此知

$$(\triangle^2 w, w) \geq \frac{1}{C^2}||w||_2^2.$$

这就证明了 $\triangle^2$ 是 D_A 上的正定算子.

定理 3.1.1 如果 A 是 D_A 上的正算子， $f \in H$, 则方程

$$Au = f \tag{3.1.12}$$

在 D_A 中最多只能有一个解.

证 设方程 (3.1.12) 有两个解 $u, v \in D_A$, 即

$$Au = f \quad 且 \quad Av = f.$$

由此知

$$A(u - v) = Au - Av = 0,$$

从而有

$$(A(u - v), u - v) = 0.$$

由 A 是正算子的假设及上式得出

$$u - v = 0 \quad 或 \quad u = v.$$

证完.

定理 1.3.1 可以从算子 $(-\triangle)$ 推广到一般的正算子而得到下列定理.

定理 3.1.2 设 A 是 D_A 上的正算子， $u \in D_A, f \in H$. u 是方程 (3.1.12) 的解的充要条件是： u 是变分问题

$$I(u) = \min_{v \in D_A} I(v) \tag{3.1.13}$$

的解，其中

$$I(v) = \frac{1}{2}(Av, v) - (f, v) \tag{3.1.14}$$

是一个二次泛函.

证　先证明条件是必要的. 设 u 是方程 (3.1.12) 的解, 则对于任意 $v \in D_A$, 命 $v-u=\varphi$ 得出

$$I(v)=I(u+\varphi)=\frac{1}{2}(A(u+\varphi),u+\varphi)-(f,u+\varphi)$$

$$=I(u)+(Au-f,\varphi)+\frac{1}{2}(A\varphi,\varphi)\geq I(u).$$

再证明条件是充分的. 设 u 是变分问题 (3.1.13) 的解, 那么, 对任意 $\varphi \in D_A$ 有

$$I(u)=\min_{t\in R} I(u+t\varphi).$$

由此知

$$\frac{d}{dt}I(u+t\varphi)|_{t=0}=0. \tag{3.1.15}$$

由 (3.1.14) 得

$$I(u+t\varphi)\quad=\frac{1}{2}(A(u+t\varphi),u+t\varphi)-(f,u+t\varphi)$$

$$=I(u)+t(Au-f,\varphi)+\frac{t^2}{2}(A\varphi,\varphi).$$

将此式代入 (3.1.15) 得出

$$(Au-f,\varphi)=0. \tag{3.1.16}$$

此式对任意 $\varphi \in D_A$ 成立, 由引理 2.3.1 知 $Au=f$, 即 u 是方程 (3.1.12) 的解. 证完.

应用此定理于例 1 得出, Poisson 方程 Dirichlet 问题

$$\begin{cases} -\triangle u=f, & 在\Omega中, \\ u=0, & 在\partial\Omega上 \end{cases}$$

等价于变分问题 (3.1.13), 此时 $A=-\triangle$, 而由 Green 公式有

$$I(v)=\frac{1}{2}(-\triangle v,v)-(f,v)=\frac{1}{2}\int_\Omega |Dv|^2dx-\int_\Omega fvdx.$$

在例 2 中，边界刚性固定的平板弯曲问题 (3.1.5),(3.1.6) 等价于变分问题 (3.1.13), 此时有 $A=\triangle^2$, 而由 (3.1.7) 有

$$I(v)=\frac{1}{2}(\triangle^2 v,v)-\left(\frac{q}{D},v\right)=\frac{1}{2}\int_\Omega|\triangle v|^2dx-\int_\Omega\frac{qv}{D}dx. \quad (3.1.17)$$

3.2 自然边界条件

设 $\alpha(x)\in C(\partial\Omega)$, 在 $\partial\Omega$ 上 $\alpha(x)\geq 0$ 但 $\alpha(x)\not\equiv 0, H=L^2(\Omega)$. 容易证明，$-\triangle$ 是

$$D=\left\{u\in C^2(\overline{\Omega})\left|\frac{\partial u}{\partial n}+\alpha(x)u=0,\quad 在\ \partial\,\Omega 上\right.\right\}$$

上的正算子. 由定理 3.1.2 知道，Poisson 方程第三边值问题 (Robin 问题)

$$-\triangle u=f\ 在\ \Omega\ 中, \quad (3.2.1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial n}+\alpha(x)u=0\ 在\ \partial\Omega\ 上. \quad (3.2.2)$$

等价于变分问题

$$I(u)=\min_{v\in D}I(v), \quad (3.2.3)$$

其中 $f\in C(\bar{\Omega})$, $\alpha(x)\in C(\partial\Omega)$, n 为外法向单位向量，$\alpha(x)\geq 0$, $\forall x\in\partial\Omega$, $\alpha(x)\not\equiv 0$, 且

$$I(v)=\frac{1}{2}(-\triangle v,v)-(f,v)$$

或

$$I(v)=\frac{1}{2}\int_\Omega|Du|^2dx-\frac{1}{2}\int_\Omega fvdx+\frac{1}{2}\int_{\partial\Omega}\alpha(x)v^2ds. \quad (3.2.4)$$

在实际求解变分问题 (3.2.3) 时，我们首先需要找出满足 (即使是近似地满足) 边界条件 (3.2.2) 的函数类 D. 这是一个比较困

难的问题. 然而, 我们可以不考虑边界条件 (3.2.2), 而将 $-\triangle$ 的定义域 D 改成

$$D_{\triangle}=C^2(\Omega)\bigcap C^1(\overline{\Omega}).$$

我们将要证明, 对于泛函 (3.2.4), 变分问题

$$I(u)=\min_{v\in D_{\triangle}} I(v) \tag{3.2.5}$$

在 $D_{\triangle}$ 中的解 u 不仅满足方程 (3.2.1), 同时也满足边界条件 (3.2.2). 边界条件 (3.2.2) 就是变分问题 (3.2.5) 的自然边界条件.

对于一般的第三边值问题 (Robin 问题)

$$-\triangle u=f \text{ 在 } \Omega \text{ 中}, \tag{3.2.6}$$

$$\frac{\partial u}{\partial n}+\alpha(x)u=\psi(x), \text{ 在 } \partial\Omega \text{ 上}, \tag{3.2.7}$$

我们有下面的定理.

定理 3.2.1 设 Ω 具有 C^1 边界 $\partial\Omega$, $f\in C(\overline{\Omega})$, $\alpha\in C(\partial\Omega)$, $\psi\in C(\partial\Omega)$, $u\in D_{\triangle}=C^2(\Omega)\bigcap C^1(\overline{\Omega})$, 记

$$I(v)=\int_{\Omega}\left(\frac{1}{2}|Dv|^2-fv\right)dx+\int_{\partial\Omega}\left(\frac{1}{2}\alpha(x)v^2-\psi v\right)ds. \tag{3.2.8}$$

如果 u 是变分问题

$$I(u)=\min_{v\in D_{\triangle}} I(v) \tag{3.2.9}$$

的解, 则 u 是 Poisson 方程第三边值问题 (3.2.6),(3.2.7) 的解. 反之, 如果在 $\partial\Omega$ 上有 $\alpha(x)\geq 0$, 且 u 是 Poisson 方程第三边值问题 (3.2.6),(3.2.7) 的解, 则 u 是变分问题 (3.2.9) 的解.

证 设 u 是变分问题 (3.2.9) 的解, 则对任意 $\varphi\in D_{\triangle}$ 有

$$I(u)=\min_{t\in R} I(u+t\varphi), \tag{3.2.10}$$

由此知

$$\frac{d}{dt}I(u+t\varphi)|_{t=0}=0. \tag{3.2.11}$$

将 $v=u+t\varphi$ 代入 (3.2.8), 展开后按 t 的方次合并同类项得出

$$
\begin{aligned}
&I(u+t\varphi)\\
&=I(u)+t\left\{\int_\Omega(Du\cdot D\varphi-f\varphi)dx+\int_{\partial\Omega}(\alpha u\varphi-\psi\varphi)ds\right\}\\
&\quad+\tfrac{t^2}{2}\left\{\int_\Omega|D\varphi|^2dx+\int_{\partial\Omega}\alpha|\varphi|^2ds\right\}.
\end{aligned}
$$

以此式代入 (3.2.11) 得出

$$\int_\Omega(Du\cdot D\varphi-f\varphi)dx+\int_{\partial\Omega}(\alpha u\varphi-\psi\varphi)ds=0. \tag{3.2.12}$$

由 Green 公式

$$\int_\Omega(Du\cdot D\varphi+\varphi\triangle u)dx=\int_{\partial\Omega}\varphi\frac{\partial u}{\partial n}ds$$

减去 (3.2.12) 得出

$$\int_\Omega(\triangle u+f)\varphi dx=\int_{\partial\Omega}\left(\frac{\partial u}{\partial n}+\alpha u-\psi\right)\varphi ds. \tag{3.2.13}$$

任取 $\varphi\in C_0^\infty(\Omega)\subset D_\triangle=C^2(\Omega)\cap C^1(\overline{\Omega})$, 代入上式得

$$\int_\Omega(\triangle u+f)\varphi dx=0,\quad \forall\varphi\in C_0^\infty(\Omega).$$

由此，根据变分法基本引理知道， u 满足 Poisson 方程 (3.2.6). 因此， (3.2.13) 可以改写成

$$\int_{\partial\Omega}\left(\frac{\partial u}{\partial n}+\alpha u-\psi\right)\varphi ds=0,\forall\ \varphi\in D_\triangle=C^2(\Omega)\cap C^1(\overline{\Omega}). \tag{3.2.14}$$

由此我们将证明 u 满足边界条件 (3.2.7). 相反，假设在某点 $x_0\in\partial\Omega$ 上有

$$\frac{\partial u}{\partial n}(x_0)+\alpha(x_0)u(x_0)\neq\psi(x_0),$$

不妨假定

$$\frac{\partial u}{\partial n}(x_0)+\alpha(x_0)u(x_0)-\psi(x_0)>0.$$

由于函数 $\frac{\partial u}{\partial n}+\alpha u-\psi$ 在 $\partial\Omega$ 上是连续的, 故存在 x_0 的邻域 $B_\epsilon(x_0)$ 使得

$$\frac{\partial u}{\partial n}+\alpha u-\psi>0,\quad 在B_\epsilon(x_0)\cap\partial\Omega中, \tag{3.2.15}$$

如像在变分法基本引理的证明中, 取函数

$$\varphi(x)=\begin{cases}\exp\left\{\dfrac{|x-x_0|^2}{|x-x_0|^2-\epsilon^2}\right\}, & 当x\in B_\epsilon(x_0)\cap\overline{\Omega},\\ 0, & 当x\in\overline{\Omega}\backslash B_\epsilon(x_0),\end{cases} \tag{3.2.16}$$

则有

$$\varphi(x)\in C^\infty(\overline{\Omega})\subset D_\triangle=C^2(\Omega)\cap C^1(\overline{\Omega}), \tag{3.2.17}$$

$$\varphi(x)>0,\quad 当x\in B_\epsilon(x_0)\cap\overline{\Omega}. \tag{3.2.18}$$

由 (3.2.16), (3.2.15) 及 (3.2.18) 得出

$$\int_{\partial\Omega}\left(\frac{\partial u}{\partial n}+\alpha u-\psi\right)\varphi ds=\int_{B_\epsilon(x_0)\cap\partial\Omega}\left(\frac{\partial u}{\partial n}+\alpha u-\psi\right)\varphi ds>0.$$

此式与 (3.2.17),(3.2.14) 矛盾. 这就证明了 u 是 Poisson 方程第三边值问题 (3.2.6),(3.2.7) 的解.

反之, 设 u 是 Poisson 方程第三边值问题 (3.2.6),(3.2.7) 的解, 且在 $\partial\Omega$ 上有 $\alpha(x)\geq 0$. 利用 Green 公式及 (3.2.6) 得出

$$\begin{aligned}\int_\Omega(Du\cdot D\varphi-f\varphi)dx&=\int_\Omega(Du\cdot D\varphi+\varphi\triangle u)dx\\&=\int_{\partial\Omega}\varphi\frac{\partial u}{\partial n}ds,\quad\forall\varphi\in D_\triangle.\end{aligned} \tag{3.2.19}$$

对任意 $v\in D_\triangle$, 命 $v-u=\varphi$, 以 $v=u+\varphi$ 代入 (3.2.8), 并利用等

式 (3.2.19) 及边界条件 (3.2.7) 得出

$$
\begin{aligned}
I(v) &= I(u+\varphi) \\
&= I(u) + \int_\Omega (Du\cdot D\varphi - f\varphi)dx + \int_{\partial\Omega}(\alpha u\varphi - \psi\varphi)ds \\
&\quad + \frac{1}{2}\left\{\int_\Omega (|D\varphi|^2 dx + \int_{\partial\Omega}\alpha|\varphi|^2 ds\right\} \\
&= I(u) + \frac{1}{2}\left\{\int_\Omega |D\varphi|^2 dx + \int_{\partial\Omega}\alpha|\varphi|^2 ds\right\} \geq I(u).
\end{aligned}
$$

这就证明了 u 是变分问题 (3.2.9) 的解. 证完.

这个定理说明，变分问题 (3.2.9) 所考虑的函数类 $C^2(\Omega)\cap C^1(\overline{\Omega})$ 不涉及边界条件 (3.2.7), 而该变分问题的解不仅满足方程 (3.2.6), 而且一定满足边界条件 (3.2.7); 这也就是说，边界条件 (3.2.7) 自然隐含在变分问题 (3.2.9) 中. 因此，通常把第三边界条件 (3.2.7) 称为变分问题 (3.2.9) 的自然边界条件. 而变分问题 (3.2.9) 的欧拉方程包含 Poisson 方程 (区域 Ω 中的方程)(3.2.6) 及自然边界条件 (区域边界 $\partial\Omega$ 上的方程)(3.2.7). 由于变分方法解微分方程边值问题时可以不考虑自然边界条件，这就给物理、力学和工程技术中的微分方程边值问题的实际求解提供了一个便利的方法.

利用 Green 公式容易证明: 若 Ω 在上有 $\alpha(x)\geq 0$ 且 $\alpha(x)\not\equiv 0$, 则边值问题 (3.2.6),(3.2.7) 的解是唯一的, 因而变分问题 (3.2.9) 的解也是唯一的.

当 $\alpha(x)\equiv 0$ 时，第三边界条件 (3.2.7) 变为第二边界条件 (Neumann 条件)

$$
\frac{\partial u}{\partial n} = \psi, \quad 在\ \partial\Omega\ 上.
$$

此时， Poisson 方程第二边值问题 (Neumann 问题):

$$
(N) \qquad \begin{cases} -\triangle u = f,\ 在\ \Omega\ 中, \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} = \psi, \quad 在\ \partial\Omega\ 上, \end{cases} \tag{3.2.20}
$$

不是对任意 $f \in C(\overline{\Omega}), \psi \in C(\partial\Omega)$ 都是有解的，因为在 Green 公式 (3.1.2) 中取 $v = 1$ 得出

$$\int_{\Omega} \triangle u dx = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} ds. \tag{3.2.21}$$

由此知道： Neumann 问题 (N) 有解的一个必要条件是

$$\int_{\Omega} f dx + \int_{\partial\Omega} \psi ds = 0. \tag{3.2.22}$$

另一方面， Neumann 问题 (N) 的解又不是唯一的，因为当 u 是 Neumann 问题 (N) 的解时，对任意常数 C,$u + C$ 也是问题 (N) 的解. 因此，为了问题 (N) 有确定的解，通常要对解 u 加上一个条件使常数 C 取确定的值. 例如，这个条件可以取为

$$\int_{\Omega} u(x) dx = 0.$$

定理 3.2.2 设 $f \in C(\overline{\Omega}), \psi \in C(\partial\Omega)$, 且

$$D_0 = \left\{ u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega}) \middle| \int_{\Omega} u dx = 0 \right\}.$$

如果 f 与 ψ 满足条件 (3.2.22),$u \in D_0$, 则 u 是 Poisson 方程 Neumann 问题 (N) 的解的充要条件是： u 是变分问题

$$I(u) = \min_{v \in D_0} I(v) \tag{3.2.23}$$

的解，其中

$$I(v) = \int_{\Omega} \left(\frac{1}{2} |Dv|^2 - fv \right) dx - \int_{\partial\Omega} \psi v ds. \tag{3.2.24}$$

证 条件的必要性证明与定理 3.2.1 的证明相同.

现证条件是充分的. 设 u 是变分问题 (3.2.24) 的解，则对任意 $\varphi \in D_0$ 有

$$I(u) = \min_{t \in R} I(u + t\varphi),$$

于是知

$$\frac{d}{dt}I(u+t\varphi)|_{t=0}=0.$$

由此，仿定理 3.2.1 推出

$$\int_{\Omega}(\triangle u+f)\varphi dx=\int_{\partial\Omega}\left(\frac{\partial u}{\partial n}-\psi\right)\varphi ds,\quad \forall\varphi\in D_0. \qquad (3.2.25)$$

对任意 $g\in C_0^\infty(\Omega)$, 记 $\int_\Omega gdx=G$, 则

$$\int_{\Omega}(g-\frac{G}{|\Omega|})dx=0,$$

因而

$$\varphi=g-\frac{G}{|\Omega|}\in D_0.$$

以此式代入 (3.2.25) 得出

$$\int_{\Omega}(\triangle u+f)gdx-\frac{G}{|\Omega|}\int_{\Omega}(\triangle u+f)dx=-\frac{G}{|\Omega|}\int_{\partial\Omega}\left(\frac{\partial u}{\partial n}-\psi\right)ds.$$

利用等式 (3.2.21) 及条件 (3.2.22), 上式可简化为

$$\int_{\Omega}(\triangle u+f)gdx=0.$$

因为 $g\in C_0^\infty(\Omega)$ 是任意的，由上式，利用变分法基本引理知道

$$\triangle u+f=0.$$

即 u 满足 Poisson 方程 (3.2.6). 这样一来，等式 (3.2.25) 可以改写成

$$\int_{\partial\Omega}\left(\frac{\partial u}{\partial n}-\psi\right)\varphi ds=0,\quad \forall\varphi\in D_0. \qquad (3.2.26)$$

由此我们可以证明 u 满足边界条件 (3.2.20). 相反，假设 u 不满足边界条件 (3.2.20), 则存在 $y\in\partial\Omega$ 使得

$$\frac{\partial u}{\partial n}(y)-\psi(y)\neq 0.$$

不妨假定

$$\frac{\partial u}{\partial n}(y)-\psi(y)>0.$$

由 $\frac{\partial u}{\partial n}-\psi$ 在 $\partial\Omega$ 上的连续性知道，存在球 $B_\epsilon(y)$ 使得

$$\frac{\partial u}{\partial n}-\psi>0,\quad 在B_\epsilon(y)\cap\partial\Omega中.$$

显然，当 ϵ 充分小时，还存在球 $B_\epsilon(z)$ 使得

$$B_\epsilon(z)\subset\Omega\backslash B_\epsilon(y).$$

命

$$\varphi_1(x)=\begin{cases}\exp\left\{\dfrac{|x-y|^2}{|x-y|^2-\epsilon^2}\right\}, & 当|x-y|<\epsilon,\\ 0, & 当|x-y|\geq\epsilon,\end{cases}$$

$$\varphi_2(x)=\begin{cases}\exp\left\{\dfrac{|x-z|^2}{|x-z|^2-\epsilon^2}\right\}, & 当|x-z|<\epsilon,\\ 0, & 当|x-z|\geq\epsilon,\end{cases}$$

并选取常数 C 使

$$\begin{aligned}\int_\Omega(\varphi_1+C\varphi_2)dx&=\int_{B_\epsilon(y)\cap\Omega}\varphi_1dx+C\int_{B_\epsilon(z)}\varphi_2dx\\&=\int_{B_\epsilon(y)\cap\Omega}\exp\left\{\frac{|x-y|^2}{|x-y|^2-\epsilon^2}\right\}dx\\&\quad+C\int_{B_\epsilon(z)}\exp\left\{\frac{|x-z|^2}{|x-z|^2-\epsilon^2}\right\}=0,\end{aligned}$$

则 $\varphi=\varphi_1+C\varphi_2\in D_0$ 且

$$\int_{\partial\Omega}\left(\frac{\partial u}{\partial n}-\psi\right)\varphi ds=\int_{\partial\Omega\cap B_\epsilon(y)}\left(\frac{\partial u}{\partial n}-\psi\right)\varphi_1ds>0.$$

这就与等式 (3.2.26) 矛盾. 这就证明了 u 也满足 Neumann 条件 (3.2.20).

对常微分方程两点边值问题

$$(M)\quad \begin{cases} -\dfrac{d}{dx}\left[p(x)\dfrac{du}{dx}\right]+q(x)u=f(x), \quad 在[a,b]中, \\ u(a)=0, \\ u'(b)+\alpha u(b)=c. \end{cases} \tag{3.2.27}$$

类似定理 3.2.1 可以证明下列定理.

定理 3.2.3 设函数 $p(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续可微, $q(x),f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续, 且在 $[a,b]$ 上有 $p(x)>0,q(x)\geq 0$. 记

$$D=\{u\in C^2((a,b))\cap C^1([a,b])|u(a)=0\},$$

$$I(u)=\int_a^b\left\{\frac{1}{2}p(x)\left(\frac{du}{dx}\right)^2+\frac{1}{2}q(x)u^2-f(x)u\right\}dx$$
$$+p(b)\left\{\frac{\alpha}{2}[u(b)]^2-cu(b)\right\}.$$

再设 $u\in D$. 如果 u 是变分问题

$$I(u)=\min_{v\in D}I(v) \tag{3.2.28}$$

的解, 则 u 也是常微分方程两点边值问题 (M) 的解. 反之, 如果 $\alpha\geq 0$, 且 u 是常微分方程两点边值问题 (M) 的解, 则 u 也是变分问题 (3.2.28) 的解.

在区间端点 b 满足的第三边界条件 (3.2.27) 是变分问题 (3.2.28) 的自然边界条件.

3.3 二阶自共轭椭圆方程边值问题

前面两节关于 Poisson 方程的结果都可以推广到一般二阶自共轭椭圆方程

$$Au=-\sum_{i,j=1}^{n}D_i[a^{i,j}(x)D_ju]+c(x)u=f(x), \tag{3.3.1}$$

这里假定

$$a^{ij}(x) = a^{ji}(x) \in C^1(\overline{\Omega}), i, j = 1, 2, \cdots, n, \tag{3.3.2}$$

$$c(x) \in C(\overline{\Omega}), c(x) \geq 0, \quad 在\Omega中, \tag{3.3.3}$$

$$\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \alpha|\xi|^2, \quad \forall x \in \overline{\Omega}, \xi \in R^n, \alpha > 0 \tag{3.3.4}$$

(一致椭圆性条件).

取 $H = L^2(\Omega)$ 及 H 的稠密线性子空间

$$B_0^2 = \{u \in C^2(\overline{\Omega}) | u = 0, \quad 在\partial\Omega上\}.$$

对 $u, v \in B_0^2$ 有

$$(Au, u) = \int_\Omega \left[\sum_{i,j=1}^{n} a^{i,j}(x) D_i u D_j v + c(x) uv\right] dx, \tag{3.3.5}$$

由此式知 A 是 B_0^2 上的对称算子. 由 (3.3.5),(3.3.4) 及 (3.3.3), 并利用 Friedrichs 不等式得出

$$(Au, u) \geq \alpha \int_\Omega |Du|^2 dx \geq c \int_\Omega u^2 dx = c||u||_2^2, \quad c > 0.$$

因此 A 为 B_0^2 上的正定算子. 从而由定理 3.1.2 得

定理 3.3.1 设 $u \in B_0^2, f \in L^2(\Omega)$ 且

$$B_0^2 = \{u \in C^2(\overline{\Omega}) | u = 0, \quad 在\partial\Omega上\}.$$

那么, u 是方程 (3.3.1) 的解的充要条件是: u 是变分问题

$$I(u) = \min_{v \in B_0^2} I(v)$$

的解, 其中

$$I(v) = \int_\Omega \left[\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} a^{i,j}(x) D_i v D_j v + \frac{1}{2} c(x) v^2 - f(x) v\right] dx.$$

仿照定理 3.2.1 及定理 3.2.2, 读者不难证明下列两个定理.

定理 3.3.2 设 Ω 具有 C^1 边界 $\partial\Omega, f \in C(\overline{\Omega})$, $\psi \in C(\partial\Omega)$, $\alpha \in C(\partial\Omega)$, $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$. 记

$$I(v) = \int_\Omega \left[\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^n a^{i,j}(x)D_ivD_jv + \frac{1}{2}c(x)v^2 - f(x)v\right]dx$$

$$+ \int_{\partial\Omega}\left(\frac{1}{2}\alpha(x)v^2 - \psi v\right)ds.$$

如果 u 是变分问题

$$I(u) = \min_{v\in C^2(\Omega)\cap C^1(\overline{\Omega})} I(v) \tag{3.3.6}$$

的解, 则 u 是二阶自共轭椭圆方程第三边值问题

$$Au = f, \ \text{在 } \Omega \text{ 中},$$

$$\sum_{i,j=1}^n a^{i,j}(x)D_ju\cos(n,x_i) + \alpha(x)u = \psi(x), \text{在 } \partial\Omega \text{ 上} \tag{3.3.7}$$

的解. 反之, 如果 u 是第三边值问题 (3.3.1),(3.3.7) 的解, 且在 $\partial\Omega$ 上有 $\alpha(x) \geq 0$, 则 u 是变分问题 (3.3.6) 的解.

第三边界条件 (3.3.7) 是变分问题 (3.3.6) 的自然边界条件.

定理 3.3.3 设 $f \in C(\overline{\Omega})$ 及 $\psi \in C(\partial\Omega)$ 满足条件

$$\int_\Omega fdx + \int_{\partial\Omega}\psi ds = 0.$$

再设

$$u \in D_0 = \left\{u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega}) \mid \int_\Omega udx = 0\right\}.$$

那么, u 是二阶自共轭椭圆方程第二变值问题 (斜导数问题)

$$Au = f(x), \ \text{在 } \Omega \text{ 中},$$

$$\sum_{i,j=1}^{n} a^{i,j}(x)D_j u\cos(n,x_i)=\psi(x),\ 在\ \partial\Omega\ 上 \tag{3.3.8}$$

的解的充要条件是： u 是变分问题

$$I(u)=\min_{v\in D_0} I(v) \tag{3.3.9}$$

的解，其中

$$I(v)=\int_\Omega\left[\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} a^{i,j}(x)D_i vD_j v+\frac{1}{2}c(x)v^2-f(x)v\right]dx-\int_{\partial\Omega}\psi v ds.$$

条件 (3.3.8) 是变分问题 (3.3.9) 的自然边界条件.

3.4 二次泛函变分问题的可解性

设 D_A 是 Hilbert 空间 H 中的稠密线性子空间， A 是 D_A 上的正算子，定理 3.1.2 得出在 D_A 中解算子方程

$$Au=f \tag{3.4.1}$$

与解变分问题

$$I(u)=\min_{v\in D_A} I(v) \tag{3.4.2}$$

的等价性，其中

$$I(v)=\frac{1}{2}(Av,v)-(f,v). \tag{3.4.3}$$

但是，如果局限在 A 的原来定义域 D_A 中，则变分问题 (3.4.2) 可能没有解；要保证解的存在性往往需要将 D_A 适当扩张.

如果 A 是 D_A 上的正定算子，由于 A 的线性对称性及正定性条件

$$(Au,u)\geq\gamma^2||u||^2,\quad \forall u\in D_A(\gamma>0), \tag{3.4.4}$$

我们可以在 D_A 中引进新的内积和相应范数

$$[u,v]=(Au,v), \tag{3.4.5}$$

$$||u||_A = \sqrt{[u,u]} = \sqrt{(Au,u)}, \tag{3.4.6}$$

于是，由 (3.4.4) 得

$$||u|| \le \frac{1}{\gamma}||u||_A, \quad \forall u \in D_A. \tag{3.4.7}$$

H 的子空间 D_A 关于范数 $||\cdot||_A$ 完备化成为一个 Hilbert 空间，记为 H_A.

定理 3.4.1 H_A 是 H 的一个子空间，即 $H_A \subset H$.

证 我们先证明 H_A 中每个元素对应于 H 中的一个元素. 设 $u \in H_A$, 由 H_A 的定义，存在序列 $\{u_k\} \subset D_A$ 使得

$$||u_k - u||_A \to 0, \quad 当k \to \infty.$$

由于 D_A 是线性子空间，故 $u_k - u_l \in D_A$, 利用不等式 (3.4.7) 得出

$$||u_k - u_l|| \le \frac{1}{\gamma}||u_k - u_l||_A \to 0, \quad 当k, l \to \infty.$$

因此，存在 $u' \in H$ 使得

$$||u_k - u'|| \to 0, \quad 当k \to \infty.$$

于是，对 H_A 中的每一元素 u, 在 H 中均有一个元素 u' 与之对应.

再证明 H_A 中不同的元素对应于 H 中的不同元素. 设 $u, v \in H_A$ 分别对应于 $u', v' \in H$, 即存在 $\{u_k\}, \{v_k\} \subset D_A$, 使得

$$\begin{aligned} &||u_k - u||_A \to 0, \quad 当k \to \infty, \\ &||u_k - u'|| \to 0, \quad 当k \to \infty, \\ &||u_k - v||_A \to 0, \quad 当k \to \infty, \\ &||u_k - v'|| \to 0, \quad 当k \to \infty. \end{aligned}$$

如果 $u' = v'$, 我们将证明 $u = v$. 由 $u' = v'$ 得出

$$\begin{aligned} ||u_k - v_k|| &= ||u_k - u' - (v_k - v')|| \\ &\le ||u_k - u'|| + ||v_k - v'|| \to 0, 当k \to \infty. \end{aligned}$$

因此，对任意 $\varphi \in D_A$ 有

$$
\begin{aligned}
|[\varphi, u_k - v_k]| &= |(A\varphi, u_k - v_k)| \\
&\leq ||A\psi|| \ \ ||u_k - v_k|| \to 0, \text{当} k \to \infty.
\end{aligned}
$$

于是得出

$$
\begin{aligned}
|[\varphi, u - v]| &= |[\varphi, u_k - v_k] - [\varphi, u_k - u] + [\varphi, v_k - v]| \\
&\leq |[\varphi, u_k - v_k]| + |[\varphi, u_k - u]| + |[\varphi, v_k - v]| \\
&\leq |[\varphi, u_k - v_k]| + ||\varphi||_A ||u_k - u||_A \\
&\quad + ||\varphi||_A ||v_k - v||_A \to 0, \text{当} k \to \infty.
\end{aligned}
$$

由此知道

$$[\varphi, u - v] = 0, \quad \forall \varphi \in D_A.$$

由于 D_A 在 H_A 中稠密，由引理 2.3.1 得出

$$u - v = 0, \quad \text{即} \quad u = v.$$

综上所述，我们可以把 $u \in H_A$ 与其对应元素 $u' \in H$ 不加区别，即视 $u = u'$, 从而 $H_A \subset H$. 证完.

这个定理说明：对任意 $u \in H_A$, 存在 $\{u_k\} \subset D_A$ 使得

$$||u_k - u||_A \to 0, \quad \text{当 } k \to \infty, \tag{3.4.8}$$

$$||u_k - u|| \to 0, \quad \text{当 } k \to \infty. \tag{3.4.9}$$

对 $u_k \in D_A$, 由 (3.4.7) 有

$$||u_k|| \leq \frac{1}{\gamma} ||u_k||_A.$$

此式两端取极限，利用 (3.4.8) 及 (3.4.9) 得出

$$||u|| \leq \frac{1}{\gamma} ||u||_A, \quad \forall u \in H_A. \tag{3.4.10}$$

对于 D_A 上的正定算子 A, 根据 (3.4.5), 二次泛函

$$I(v) = \frac{1}{2}(Av, v) - (f, v), v \in D_A \tag{3.4.11}$$

可以推广成

$$J(v)=\frac{1}{2}[v,v]-(f,v),v\in H_A. \tag{3.4.12}$$

定理 3.4.2 设 $f\in H$. 对 D_A 上的正定算子 A, 变分问题

$$J(u)=\min_{v\in H_A}J(v),\quad J(v)\text{由 (3.4.12) 定义} \tag{3.4.13}$$

有唯一的解 $u\in H_A$, 它满足

$$[u,v]=(f,v),\quad \forall u\in H_A. \tag{3.4.14}$$

证 由 (3.4.10) 得出

$$|(f,v)|\le ||f||\ ||v||\le \frac{||f||}{\gamma}||v||_A,\quad \forall u\in H_A.$$

因此, (f,v) 在 H_A 上是 v 的线性有界泛函, 根据 Riesz 表示定理, 存在唯一的 $u\in H_A$ 使得 (3.4.14) 成立. 于是, 由 (3.4.12) 及 (3.4.14) 有

$$J(v)=\frac{1}{2}[v,v]-[u,v]=\frac{1}{2}[v-u,v-u]-\frac{1}{2}[u,u]. \tag{3.4.15}$$

此式说明, 当 $v=u$ 时, $J(v)$ 取最小值, 且

$$J(u)=\min_{v\in H_A}J(v)=-\frac{1}{2}[u,u]. \tag{3.4.16}$$

如果 $w\in H_A$ 也是变分问题 (3.4.13) 的解, 则由 (3.4.16) 有

$$J(w)=\min_{v\in H_A}J(v)=-\frac{1}{2}[u,u], \tag{3.4.17}$$

而由 (3.4.15) 有

$$J(w)=\frac{1}{2}[w-u,w-u]-\frac{1}{2}[u,u]. \tag{3.4.18}$$

比较 (3.4.17) 及 (3.4.18) 得出

$$[w-u,w-u]=0.$$

由此知道 $w=u$, 即变分问题 (3.4.13) 只有一个解. 证完.

如果变分问题 (3.4.13) 的解 $u \in D_A$, 则由 (3.4.5) 及 (3.4.14) 有

$$(Au,v)=[u,v]=(f,v), \quad \forall u \in H_A. \tag{3.4.19}$$

由于 $D_A \subset H_A \subset H$, 且 D 在 H 中稠密, 易知 H_A 在 H 中也是稠密的. 因此, 由引理 2.3.1 可得

$$Au=f,$$

即 u 是算子方程 (3.4.1) 的解.

一般说来, 变分问题 (3.4.13) 的解 $u \in H_A$ 但不一定有 $u \in D_A$. 我们把变分问题 (3.4.13) 的解 $u \in H_A$, 即满足方程 (3.4.14) 的 $u \in H_A$ 称为算子方程 (3.4.1) 的 **广义解** 或 **弱解**.

例如, 当 $H=L^2(\Omega)$ 时, $A=-\triangle$ 是 $D_A=C_0^2(\Omega)$ 上的正定算子, 在 $C_0^2(\Omega)$ 中定义内积

$$[u,v]=(Au,v)=\int_\Omega Du \cdot Dv dx.$$

于是, $C_0^2(\Omega)$ 关于范数

$$||u||_A=[u,u]^{\frac{1}{2}}=\left(\int_\Omega |Du|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

的完备化空间为 $H_A=W_0^{1,2}(\Omega)$. 于是, 由定理 3.4.2 得出: 对泛函

$$J(u)=\frac{1}{2}[u,u]-(f,u)=\frac{1}{2}\int_\Omega |Du|^2 dx-\frac{1}{2}\int_\Omega fudx,$$

变分问题

$$J(u)=\min_{v\in W_0^{1,2}(\Omega)} J(v)$$

有唯一的解 $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$, 它满足

$$\int_\Omega (Du\cdot Dv-fv)dx=0, \quad \forall v \in W_0^{1,2}(\Omega).$$

这个函数 u 也是算子方程

$$-\triangle u = f$$

在 $W_0^{1,2}(\Omega)$ 中的广义解 (弱解), 也称为 Poisson 方程 Dirichlet 问题

$$\begin{cases} -\triangle u = f, & \text{在}\Omega\text{中}, \\ u = 0, & \text{在}\partial\Omega\text{上}, \end{cases}$$

在 $W_0^{1,2}(\Omega)$ 中的广义解 (弱解).

等式 (3.4.14) 定义了一个线性算子 $G: H \to H_A$, 即每一 $f \in H$ 对应于唯一的 $u = Gf \in H_A$ 使得

$$[Gf, v] = (f, v), \quad \forall v \in H_A. \tag{3.4.20}$$

由于 $H_A \subset H, G$ 也可视为 $H \to H$ 的线性算子.

定理 3.4.3 对 D_A 上的正定算子 A, 由等式 (3.4.20) 定义的算子 G 是 $H \to H_A$ 的线性有界算子, G 也是 H 上的对称有界算子.

证 显然算子 G 是线性的. 对任意 $f, h \in H$, 在 (3.4.20) 中取 $v = Gh \in H_A$ 得出

$$[Gf, Gh] = (f, Gh), \quad \forall f, h \in H.$$

由此式及 (3.4.20) 又得出

$$(f, Gh) = [Gf, Gh] = [Gh, Gf]$$

$$= (h, Gf) = (Gf, h), \quad \forall f, h \in H. \tag{3.4.21}$$

此式说明, G 是 H 上的对称算子. 由 (3.4.21) 及 (3.4.10) 得出

$$||Gf||_A^2 = [Gf, Gf] = (f, Gf)$$

$$\leq ||f||\ ||Gf|| \leq \frac{||f||}{\gamma}||Gf||_A, \quad \forall f \in H.$$

由此知

$$\|Gf\|_A \leq \frac{1}{\gamma}\|f\|, \quad \forall f \in H. \tag{3.4.22}$$

这个式子说明， G 是 $H \to H_A$ 的有界算子. 再利用 (3.4.10), 由上式得出

$$\|Gf\| \leq \frac{1}{\gamma}\|Gf\|_A \leq \frac{1}{\gamma^2}\|f\|, \quad \forall f \in H.$$

由此式知道， G 也是 H 上的有界算子. 证完.

由 (3.4.20) 看出：算子方程 $Gf = 0$ 有唯一的解 $f = 0$，因此， G 的逆算子 G^{-1} 存在. 对任意 $u \in D_A$, 由 (3.4.20) 及 (3.4.5) 得出

$$[GAu, v] = (Au, v) = [u, v], \quad \forall v \in H_A,$$

从而有

$$GAu = u, \quad \forall u \in D_A$$

或者

$$Au = G^{-1}u, \quad \forall v \in H_A.$$

此式说明，算子 G^{-1} 是算子 A 的扩张， G^{-1} 的定义域 $\tilde{D}_A$ 满足

$$D_A \subset \tilde{D}_A \subset H_A.$$

如果我们把算子 A 视为 A 的扩张 G^{-1}, 则有 $G = A^{-1}$.

对于满足条件 (3.3.2) ~ (3.3.4) 的一致椭圆算子

$$Au = -\sum_{i,j=1}^{n} D_i[a^{ij}(x)D_j u] + c(x)u, \tag{3.4.23}$$

取 $H = L^2(\Omega)$, 则 A 是 $D_A = C_0^2(\Omega)$ 上的正定算子. 在 $D_A = C_0^2(\Omega)$ 中定义内积

$$[u, v] = (Au, v) = \mathcal{A}(u, v)$$

$$= \int_\Omega \left[\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(x)D_i u D_j v] + C(x)uv\right] dx.$$

由条件 (3.3.2) 及 (3.3.3) 可设

$$
\begin{aligned}
&|a^{ij}(x)| \le M, \quad i,j = 1,2,\cdots,n, \\
&|c(x)| \le C.
\end{aligned}
$$

于是，由 Friedrichs 不等式得出

$$
\begin{aligned}
||u||_A^2 &= [u,u] = \mathcal{A}(u,u) \\
&= \int_\Omega \left[\sum_{i,j=1}^n a^{ij}(x) D_i u D_j u + c(x) u^2 \right] dx \\
&\le M \int_\Omega \left(\sum_{i=1}^n |D_i u| \right)^2 dx + C \int_\Omega u^2 dx \qquad (3.4.24) \\
&\le nM \int_\Omega |Du|^2 dx + C_1 \int_\Omega |Du|^2 dx \\
&= C_2^2 \int_\Omega |Du|^2 dx, \quad C_2 > 0.
\end{aligned}
$$

由条件 (3.3.3) 及 (3.3.4) 又可得出

$$
||u||_A^2 = [u,u] \ge \alpha \int_\Omega |Du|^2 dx, \quad \alpha > 0. \qquad (3.4.25)
$$

合并 (3.4.24) 及 (3.4.25) 得

$$
\sqrt{\alpha} ||Du||_2 \le ||u||_A \le C_2 ||Du||_2,
$$

即 $||u||_A$ 与 $||Du||_2$ 为等价范数．因此

$$
\begin{aligned}
H_A &= C_0^2(\Omega)\text{关于范数}||\cdot||_A\text{的完备化} \\
&= C_0^2(\Omega)\text{关于范数}||Du||_2\text{的完备化} \\
&= W_0^{1,2}(\Omega).
\end{aligned}
$$

于是，由定理 3.4.2 得出：当 $f \in L^2(\Omega)$ 时，对泛函

$$J(u) = \frac{1}{2}[u,u] - (f,u)$$
$$= \frac{1}{2}\int_\Omega \left[\sum_{i,j=1}^n a^{ij}(x)D_iuD_ju + c(x)u^2\right]dx - \int_\Omega fudx,$$

变分问题

$$J(u) = \min_{v \in W_0^{1,2}(\Omega)} J(v)$$

有唯一的解 $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$，它满足

$$[u,v] = \mathcal{A}(u,v) = (f,v), \quad \forall v \in H_A = W_0^{1,2}(\Omega),$$

即

$$\int_\Omega \left[\sum_{i,j=1}^n a^{ij}(x)D_iuD_jv + c(x)uv\right]dx = \int_\Omega fvdx, \quad \forall v \in W_0^{1,2}(\Omega).$$

这个解 u 就是算子方程

$$Au = -\sum_{i,j=1}^n D_i[a^{i,j}(x)D_ju] + c(x)u = f$$

或 Dirichlet 问题

$$\begin{cases} Au = f, & \text{在 } \Omega \text{ 中}, \\ u = 0, & \text{在 } \partial\Omega \text{ 上} \end{cases}$$

的唯一广义解. 这时，由等式 (3.4.20) 定义的算子 G 不仅是 $H = L^2(\Omega) \to H_A = W_0^{1,2}(\Omega)$ 的线性有界算子及 H 上的对称有界算子 (定理 3.4.3)，而且也是 $L^2(\Omega) \to W_0^{1,2}(\Omega)$ 的紧算子，即有下面的定理.

定理 3.4.4 对于由 (3.4.23) 定义且满足条件 (3.3.2)~(3.3.4) 的一致椭圆算子 A, 算子 $G = A^{-1}$ 是 $H \to H_A$(即 $L^2(\Omega) \to W_0^{1,2}(\Omega)$) 的紧算子.

证 对 $H = L^2(\Omega)$ 中任意有界集合 S, 设

$$\|f\|_2 \le M, \quad f \in S. \tag{3.4.26}$$

利用不等式 (3.4.22) 得

$$\|Gf\|_A \le \frac{1}{\gamma}\|f\|_2 \le \frac{M}{\gamma}, \quad \forall f \in S, \tag{3.4.27}$$

即 G 将 H 中有界集合 S 映成 $H_A = W_0^{1,2}(\Omega)$ 中的有界集合

$$GS = \{Gf | f \in S\}.$$

由定理 2.6.3 知道, $W_0^{1,2}(\Omega)$ 中的有界集合 GS 在 $L^2(\Omega)$ 中为列紧集. 设序列 $\{Gf_k\} \subset GS(f_k \in S)$ 且 $\{Gf_k\}$ 在 $L^2(\Omega)$ 中收敛. 由 (3.4.20) 及 (3.4.26) 得出

$$\begin{aligned}
\|Gf_k - Gf_l\|_A^2 &= [G(f_k - f_l), G(f_k - f_l)] \\
&= (f_k - f_l, G(f_k - f_l)) \\
&\le \|f_k - f_l\|_2 \|G(f_k - f_l)\|_2 \\
&\le (\|f_k\|_2 + \|f_l\|_2 \|G(f_k - f_l)\|_2 \\
&\le 2M\|Gf_k - Gf_l\|_2 \to 0, \quad 当 k, l \to \infty.
\end{aligned}$$

因此序列 $\{Gf_k\}$ 在 $W_0^{1,2}(\Omega)$ 中也是收敛的. 从而 GS 在 $H_A = W_0^{1,2}(\Omega)$ 中是列紧集. 这就证明了 G 将 $H = L^2(\Omega)$ 中任意有界集合 S 映成 $H_A = W_0^{1,2}(\Omega)$ 中的列紧集合, 即 G 是 $L^2(\Omega) \to W_0^{1,2}(\Omega)$ 的紧算子. 证完.

3.5 二阶自共轭椭圆方程的特征值问题

设 A 是由 (3.3.1) 定义的二阶线性自共轭一致椭圆算子, 即

$$Au = -\sum_{i,j=1}^{n} D_i[a^{i,j}(x)D_j u] + c(x)u, \tag{3.5.1}$$

其中系数 $a^{i,j}(x)$ 及 $c(x)$ 满足条件 (3.3.2) ~ (3.3.4). 记

$$\mathcal{A}(u,v)=\int_\Omega\left(\sum_{i,j=1}^n a^{i,j}(x)D_iuD_jv+c(x)uv\right)dx. \tag{3.5.2}$$

对实数 λ, 如果存在函数 $0\neq u(x)\in W_0^{1,2}(\Omega)$ 使得

$$\mathcal{A}(u,v)=\lambda(u,v),\quad \forall v\in W_0^{1,2}(\Omega), \tag{3.5.3}$$

即

$$\int_\Omega\left[\sum_{i,j=1}^n a^{i,j}(x)D_iuD_jv+c(x)uv\right]dx=\lambda\int_\Omega uvdx,\quad \forall v\in W_0^{1,2}(\Omega),$$

则称 λ 为算子 A 或二阶自共轭椭圆方程 Dirichlet 问题 (特征值问题)

$$\begin{cases} Au=\lambda u, & 在\Omega中,\\ u=0, & 在\partial\Omega上\end{cases} \tag{3.5.4}$$

的 **(广义) 特征值**, 称 u 为对应于特征值 λ 的 **(广义) 特征函数**.

对任意 $u\in W_0^{1,2}(\Omega)$, 由条件 (3.3.2) ~ (3.3.4) 及 Friedrichs 不等式得出

$$\begin{aligned}Q(u)=\mathcal{A}(u,u)&=\int_\Omega\left[\sum_{i,j=1}^n a^{i,j}(x)D_iuD_ju+c(x)u^2\right]dx\\ &\geq\alpha\int_\Omega|Du|^2dx=\alpha||u||_{1,2}^2\geq c||u||_2^2, c>0.\end{aligned} \tag{3.5.5}$$

由此知

$$J(u)=\frac{Q(u)}{||u||_2^2}\geq c>0,\quad \forall 0\neq u\in W_0^{1,2}(\Omega). \tag{3.5.6}$$

此式说明, 泛函 $J(u)$ 有正的下界. 因此, 如果定义

$$\lambda_1=\inf_{0\neq u\in W_0^{1,2}(\Omega)}\frac{Q(u)}{||u||_2^2}=\inf_{u\in W_0^{1,2}(\Omega),||u||_2=1}Q(u), \tag{3.5.7}$$

则 $\lambda_1 \geq c > 0$. 今证明 λ_1 是算子 A 的最小特征值.

取 $Q(u)$ 的极小序列 $\{u_k\} \subset W_0^{1,2}(\Omega)$, $||u_k||_2 = 1(k = 1, 2, \cdots)$, 使得

$$\lim_{k\to\infty} Q(u_k) = \lambda_1. \tag{3.5.8}$$

由此式知道数列 $\{Q(u_k)\}$ 有界, 再由 (3.5.5) 得出数列 $\{||u_k||_{1,2}\}$ 有界, 即 $\{u_k\}$ 是 $W_0^{1,2}(\Omega)$ 中的有界序列. 由定理 2.6.3 知序列 $\{u_k\}$ 是 $L^2(\Omega)$ 中的列紧集. 因此, $\{u_k\}$ 有子序列, 仍记此子序列为 $\{u_k\}$, 它在 $L^2(\Omega)$ 中收敛于一个函数 $u \in L^2(\Omega)$, 即

$$||u_k - u||_2 \to 0, \quad 当 k \to \infty. \tag{3.5.9}$$

因为 $Q(u)$ 是 u 的二次泛函, 易证

$$Q\left(\frac{u_k - u_l}{2}\right) + Q\left(\frac{u_k + u_l}{2}\right) = \frac{1}{2}Q(u_k) + \frac{1}{2}Q(u_l). \tag{3.5.10}$$

由 (3.5.7) 知道

$$Q(u) \geq \lambda_1 ||u||_2^2, \quad \forall u \in W_0^{1,2}(\Omega). \tag{3.5.11}$$

由 (3.5.9) 又知道 $||u||_2 = 1$ 且

$$\begin{aligned}\left\|\frac{u_k + u_l}{2} - u\right\|_2 &= \frac{1}{2}||u_k - u + u_l - u||_2 \\ &\leq \frac{1}{2}||u_k - u||_2 + \frac{1}{2}||u_l - u||_2 \to 0, \\ &\qquad 当 k, l \to \infty.\end{aligned}$$

由此知道

$$\frac{u_k + u_l}{2} \to u, \quad 当 k, l \to \infty.$$

从而有

$$\left\|\frac{u_k + u_l}{2}\right\|_2 \to ||u||_2 = 1, \quad 当 k, l \to \infty. \tag{3.5.12}$$

由 (3.5.5), (3.5.10)~(3.5.12) 及 (3.5.8) 得出

$$\begin{aligned}
&\frac{\alpha}{4}\|u_k-u_l\|_{1,2}^2\\
&=\alpha\left\|\frac{u_k-u_l}{2}\right\|_{1,2}^2\le Q\left(\tfrac{u_k-u_l}{2}\right)\\
&\le\frac{1}{2}Q(u_k)+\frac{1}{2}Q(u_l)-\lambda_1\left\|\frac{u_k+u_l}{2}\right\|_2^2\\
&\to\frac{\lambda_1}{2}+\frac{\lambda_1}{2}-\lambda_1=0,\quad \text{当 } k,l\to\infty.
\end{aligned}$$

即 $\{u_k\}$ 是 $W_0^{1,2}(\Omega)$ 中的 Cauchy 序列. 再由 (3.5.9) 知道

$$u\in W_0^{1,2}(\Omega), \|u_k-u\|_{1,2}\to 0,\quad \text{当}k,l\to\infty. \tag{3.5.13}$$

由此可设：存在正常数 M, 使得

$$\|u\|_{1,2}=\|Du\|_2\le M, \tag{3.5.14}$$

$$\|u_k\|_{1,2}=\|Du_k\|_2\le M, k=1,2,\cdots. \tag{3.5.15}$$

由 (3.3.2) 及 (3.3.3) 又可设：存在常数 Λ 及 C, 使得

$$|a^{i,j}(x)|\le\Lambda\quad (i,j=1,2,\cdots,n), \tag{3.5.16}$$

$$|c(x)|\le C. \tag{3.5.17}$$

根据 $Q(u)$ 的定义 (3.5.5), 由 (3.5.14) ~ (3.5.17),(3.5.13) 及 (3.5.9) 得出

$$\begin{aligned}
&|Q(u_k)-Q(u)|\\
&=\left|\int_\Omega\left[\sum_{i,j=1}^n a^{i,j}(x)(D_iu_kD_ju_k-D_iuD_ju)+c(x)(u_k^2-u^2)\right]dx\right|
\end{aligned}$$

$$\leq \left| \int_\Omega \sum_{i,j=1}^n |a^{i,j}(x)| (D_i u_k - D_i u) D_j u_k + D_i u (D_j u_k - D_j u) \right| dx$$

$$+ \int_\Omega |c(x)| |(u_k + u)(u_k - u)| dx$$

$$\leq \Lambda \sum_{i,j=1}^n (||D_i u_k - D_i u||_2 ||D_j u_k||_2 + ||D_i u||_2 ||D_j u_k - D_j u||_2)$$

$$+C||u_k + u||_2 ||u_k - u||_2$$

$$\leq n\Lambda(||D(u_k - u)||_2 ||Du_k||_2 + ||Du||_2 ||D(u_k - u)||_2)$$

$$+C(||u_k||_2 + ||u||_2)||u_k - u||_2$$

$$\leq 2n\Lambda M ||D(u_k - u)||_2 + 2C||u_k - u||_2$$

$$\leq 2n\Lambda M ||u_k - u||_{1,2} + 2C||u_k - u||_2 \to 0, \quad 当\ k \to \infty.$$

由 (3.5.8),(3.5.6) 及上式得出

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \lim_{k\to\infty} Q(u_k) = Q(u) = \frac{Q(u)}{||u||_2^2} \\ &= J(u) = \inf_{0\neq v \in W_0^{1,2}(\Omega)} J(v). \end{aligned} \tag{3.5.18}$$

对任意 $v \in W_0^{1,2}(\Omega)$, 根据上式得出

$$J(u) = \inf_{t \in R} J(u + tv).$$

由此知

$$\left. \frac{\partial J(u+tv)}{\partial t} \right|_{t=0} = 0. \tag{3.5.19}$$

由 (3.5.6),(3.5.5), 经计算得出

$$J(u+tv) = \frac{Q(u+tv)}{||u+tv||_2^2} = \frac{Q(u) + 2t\mathcal{A}(u,v) + t^2 Q(v)}{||u||_2^2 + 2t(u,v) + t^2 ||v||_2^2},$$

$$\frac{\partial J(u+tv)}{\partial t}=\frac{2\mathcal{A}(u,v)+2tQ(v)}{||u||_2^2+2t(u,v)+t^2||v||_2^2}$$
$$-\frac{[Q(u)+2t\mathcal{A}(u,v)+t^2Q(v)][2(u,v)+2t||v||_2^2]}{[||u||_2^2+2t(u,v)+t^2||v||_2^2]^2}.$$

以此式代入 (3.5.19) 得出

$$\mathcal{A}(u,v)-\frac{Q(u)}{||u||_2^2}(u,v)=0.$$

由此式及 (3.5.18) 得出

$$\mathcal{A}(u,v)=\lambda_1(u,v),$$

即 (3.5.3) 对任意 $v\in W_0^{1,2}(\Omega)$ 成立. 因此, λ_1 是算子 A 的特征值, u 是对应于 λ_1 的特征函数.

设 λ 为 A 的任意特征值, 即存在 $0\neq w\in W_0^{1,2}(\Omega)$ 使得

$$\mathcal{A}(w,v)=\lambda(w,v),\quad \forall v\in W_0^{1,2}(\Omega).$$

在此式中, 取 $v=w$ 得出

$$\lambda=\frac{\mathcal{A}(w.w)}{(w,w)}=\frac{Q(w)}{||w||_2^2}\geq\inf_{0\neq v\in W_0^{1,2}(\Omega)}\frac{Q(v)}{||v||_2^2}=\lambda_1.$$

这就证明了 λ_1 是 A 的最小特征值.

我们可以采用下列方法依次求出算子 A 的所有特征值.

假设我们已经得出算子 A 的 $m-1$ 个特征值 $\lambda_1,\cdots,\lambda_{m-1}(m\geq 2)$, 且

$$\lambda_1\leq\lambda_2\leq\cdots\leq\lambda_{m-1},\tag{3.5.20}$$

对应于 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_{m-1}$ 的特征函数为

$$u_1,u_2,\cdots,u_{m-1},\tag{3.5.21}$$

且 $||u_k||_2=1(k=1,2,\cdots,m-1)$. 函数组 (3.5.21) 的所有线性组合成为 $L^2(\Omega)$ 的一个线性子空间, 叫做组 (3.5.21) 在 $L^2(\Omega)$ 中生成的子空间, 记为

$$V_{m-1}=\text{span}\{u_1,u_2,\cdots,u_{m-1}\}.$$

以 $V_{m-1}^{\perp}$ 表示 V_{m-1} 在 $L^2(\Omega)$ 中正交补空间.

根据泛函 $J(u)$ 的有界性 (3.5.6), 我们将证明

$$\lambda_m = \inf_{0\neq u\in W_0^{1,2}(\Omega)\cap V_{m-1}^{\perp}} J(u) = \inf_{u\in W_0^{1,2}(\Omega)\cap V_{m-1}^{\perp}} Q(u) \qquad (3.5.22)$$

就是算子 A 的第 m 个特征值.

重复上面讨论变分问题 (3.5.7) 的步骤可以证明：存在函数 $u_m \in W_0^{1,2}(\Omega) \cap V_{m-1}^{\perp}$, 使得

$$||u_m||_2 = 1, \qquad (3.5.23)$$

$$\lambda_m = Q(u_m) = J(u_m) \qquad (3.5.24)$$

$$= \inf_{0\neq v\in W_0^{1,2}(\Omega)\cap V_{m-1}^{\perp}} J(v) = \inf_{v\in W_0^{1,2}(\Omega)\cap V_{m-1}^{\perp},||v||_2=1} Q(v),$$

$$\mathcal{A}(u_m, v) = \lambda_m(u_m, v)\ \forall\ v \in W_0^{1,2}(\Omega) \cap V_{m-1}^{\perp}. \qquad (3.5.25)$$

对任意 $v \in W_0^{1,2}(\Omega)$, 视 $v \in L^2(\Omega)$, 由定理 2.4.2 知道， v 可以表示为

$$v = \psi + \varphi, \psi \in V_{m-1}, \varphi \in V_{m-1}^{\perp}, \qquad (3.5.26)$$

因而

$$\psi = \sum_{i=1}^{m-1} a_i u_i \in W_0^{1,2}(\Omega) \cap V_{m-1}, \qquad (3.5.27)$$

这里 a_1, a_{m-1} 均为实数.

因为 $u_1, \cdots, u_{m-1}$ 分别是对应于特征值 $\lambda_1, \cdots, \lambda_{m-1}$ 的特征函数，所以对 $i = 1, \cdots, m-1$ 均有

$$\mathcal{A}(u_i, v) = \lambda_i(u_i, v), \quad \forall\ v \in W_0^{1,2}(\Omega). \qquad (3.5.28)$$

因此，由 (3.5.2),(3.5.27) 及 $u_m \in V_{m-1}^{\perp}$ 得出

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(u_m, \psi) &= \mathcal{A}(\psi, u_m) = \mathcal{A}\left(\sum_{i=1}^{m-1} a_i u_i, u_m\right) \\ &= \sum_{i=1}^{m-1} a_i \mathcal{A}(u_i, u_m) = \sum_{i=1}^{m-1} a_i \lambda_i (u_i, u_m) = 0,\end{aligned} \qquad (3.5.29)$$

$$(u_m, \psi) = 0. \tag{3.5.30}$$

再由 (3.5.2),(3.5.26),(3.5.29),(3.5.25) 及 (3.5.30) 得出

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(u_m, v) &= \mathcal{A}(u_m, \psi + \varphi) = \mathcal{A}(u_m, \psi) + \mathcal{A}(u_m, \varphi) \\ &= \mathcal{A}(u_m, \varphi) = \lambda_m(u_m, \varphi) \\ &= \lambda_m(u_m, \psi + \varphi) = \lambda_m(u_m, v).\end{aligned}$$

由于 $v \in W_0^{1,2}(\Omega)$ 是任意的，上式说明 $u = u_m$ 满足条件 (3.5.3)，即 λ_m 是算子 A 的特征值， u_m 是对应于 λ_m 的特征函数. 由等式 (3.5.24) 易知 $\lambda_m \geq \lambda_{m-1}$.

由于 $W_0^{1,2}(\Omega)$ 是无限维空间，按 (3.5.22) 得出算子 A 的特征值的无限序列

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_m \leq \cdots \tag{3.5.31}$$

及其相应的特征函数序列

$$u_1, u_2, \cdots, u_m, \cdots. \tag{3.5.32}$$

关于算子 A 的特征值 (3.5.31) 及对应的特征函数 (3.5.32) 有下列一些重要性质.

性质 1 最小特征值 λ_1 对应的特征函数 $u(x)$ 可以取来满足 $u(x) \geq 0, \forall x \in \Omega$. $\lambda_1 = Q(u), u \in W_0^{1,2}(\Omega)$.

证 上面已经证明，最小特征值 λ_1 及其对应的特征函数 u 满足

$$\lambda_1 = Q(u), u \in W_0^{1,2}(\Omega), ||u||_2 = 1.$$

我们取 $w = |u(x)|, \forall \in \Omega$, 则

$$w \in W_0^{1,2}(\Omega), ||w||_2 = 1. \tag{3.5.33}$$

且由 (3.5.5) 知道

$$Q(w) = Q(|u|) = Q(u) = \lambda_1. \tag{3.5.34}$$

此式说明，以 w 代替 u 后，等式 (3.5.18) 仍成立. 前面已经证明，当 $u \in W_0^{1,2}(\Omega), ||u||_2 = 1$ 满足 (3.5.18) 时， u 就是对应于特征值 λ_1 的特征函数. 因此，由 (3.5.33) 及 (3.5.34) 知道， $w = |u|$ 是对应于特征值 λ_1 的特征函数.

性质 2 对应于不同特征值的特征函数在 $L^2(\Omega)$ 中是正交的.

证 设特征值 λ_k, λ_m 对应的特征函数分别为 u_k, u_m，且 $\lambda_k \neq \lambda_m$. 由 (3.5.3) 有

$$\mathcal{A}(u_k, u_m) = \lambda_k(u_k, u_m),$$

$$\mathcal{A}(u_m, u_k) = \lambda_m(u_m, u_k).$$

但由 (3.5.2) 有

$$\mathcal{A}(u_k, u_m) = \mathcal{A}(u_m, u_k).$$

由上面三个等式得出

$$(\lambda_k - \lambda_m)(u_k, u_m) = 0.$$

由此知道，当 $\lambda_k \neq \lambda_m$ 时有 $(u_k, u_m) = 0$.

性质 3 对应于同一特征值只有有限个线性无关的特征函数，或者说，对应于每一特征值的特征函数空间是有限维的.

证 与结论相反，假定对应于特征值 λ 有无限多个线性无关的特征函数 $\{v_k\}$，不妨假定它们在 $L^2(\Omega)$ 中是规范正交的，即 $(v_k, v_l) = \delta_k(k, l = 1, 2, \cdots), \delta_k$ 为 Kronecker 符号

$$\delta_{kl} = \begin{cases} 1, & \text{当}k = l, \\ 0, & \text{当}k \neq l. \end{cases}$$

由 (3.5.5) 及 (3.5.3) 有

$$\alpha||v_k||_{1,2}^2 \leq \mathcal{A}(v_k, v_k) = \lambda(v_k, v_k) = \lambda, \quad k = 1, 2, \cdots,$$

即 $\{v_k\}$ 为 $W_0^{1,2}(\Omega)$ 中的有界集合. 由定理 2.6.3, $\{v_k\}$ 是 $L^2(\Omega)$ 中的列紧集，因此， $\{v_k\}$ 在 $L^2(\Omega)$ 中有收敛的子序列，但这是不可能的，因为对任意两个特征函数 $v_k, v_l(k \neq l)$ 有 $||v_k - v_l|| = \sqrt{2}$.

性质 4 特征值序列 (3.5.31) 满足

$$\lim_{m\to\infty} \lambda_m = +\infty.$$

证 相反，设特征值序列 (3.5.31) 是有界的，设存在常数 K 使得

$$0 < \lambda_m \leq K(m = 1, 2, \cdots).$$

不妨假定对应于特征值序列 (3.5.31) 的特征函数序列 (3.5.32) 在 $L^2(\Omega)$ 中是规范正交的，即 $(u_k, u_l) = \delta_{kl}(k, l = 1, 2, \cdots)$. 由 (3.5.5) 及 (3.5.3) 得出：对 $m = 1, 2, \cdots$ 均有

$$\alpha||u_m||_{1,2}^2 \leq \mathcal{A}(u_m, u_m) = \lambda_m(u_m, u_m) = \lambda_m \leq K.$$

即 $\{u_k\}$ 是 $W_0^{1,2}(\Omega)$ 中的有界序列，因而可以在 $L^2(\Omega)$ 中选出收敛的子序列，这也与 $||u_m - u_l||_2 = \sqrt{2}(m \neq l)$ 相矛盾.

性质 5 特征函数序列 (3.5.32) 是空间 $W_0^{1,2}(\Omega)$ 的基底.

证 由上一节知道，$H_A = W_0^{1,2}(\Omega)$ 是 $D_A = C_0^2(\Omega)$ 关于范数

$$||u||_A = [u, u]^{\frac{1}{2}} = \mathcal{A}(u, u)^{\frac{1}{2}}$$

的完备化，H_A 中两个函数 u, v 的内积为

$$[u, v] = \mathcal{A}(u, v).$$

假如特征函数序列 (3.5.32) 不是 $W_0^{1,2}(\Omega)$ 的基底，则存在 $0 \neq v \in W_0^{1,2}(\Omega)$ 使得 v 与 (3.5.32) 中所有函数均正交，即

$$[u_m, v] = \mathcal{A}(u_m, v) = 0, \quad m = 1, 2, 3, \cdots.$$

因 u_m 为对应于特征值 λ_m 的特征向量，由上式得出

$$0 = \mathcal{A}(u_m, v) = \lambda_m(u_m, v), \quad m = 1, 2, 3, \cdots.$$

由此式及 $\lambda_m > 0$ 推出

$$(u_m, v) = 0, \quad m = 1, 2, 3, \cdots,$$

即 v 在 $L^2(\Omega)$ 中与 $u_1, u_2, u_3, \cdots$ 均正交. 因此, 对所有 $m = 2, 3, \cdots, v$ 在 $L^2(\Omega)$ 中与 $V_{m-1} = \text{span}\{u_1, \cdots, u_{m-1}\}$ 正交, 即 $v \in V_{m-1}^{\perp}$. 由 $0 \neq v \in W_0^{1,2}(\Omega) \cap V_{m-1}^{\perp}$, 根据 (3.5.22) 有

$$\lambda_m \leq J(v) = \frac{Q(v)}{\|v\|_2^2}, m = 2, 3, \cdots$$

此式右端为一确定的正数, 而由性质 4 有 $\lim\limits_{m \to \infty} \lambda_m = +\infty$. 这就得出了矛盾的结果.

3.6 Riesz 方法

微分方程的定解问题, 只有当方程、所讨论的区域及定解条件都很简单时, 才有可能求出其精确解. 大量的定解问题是求不出精确解的. 对物理、力学和工程技术中提出的许多微分方程定解问题, 如果能求出近似解, 其近似程度又符合实际的要求, 那么近似解的用处并不亚于精确解. 而且在实际问题中, 推导微分方程时, 往往需要做一些简化假定, 同时定解条件 (如观测得到的数据) 一般都是近似的, 所以实际微分方程定解问题往往只能近似地反映所研究的自然现象和规律, 因而其精确解也只能是研究对象物理性态的近似描述. 因此, 近似解法在实际应用中有重大意义.

本节介绍求变分问题近似解的一个古典方法 —— 里斯方法. 下一节介绍与变分法密切相关的伽辽金方法. 下一章再介绍当前工程技术中广泛应用于求近似解的一种变分方法 —— 有限元素法.

我们先用一个简单的例子说明里斯方法的基本思想.

例 1 由定理 3.2.3, 求常微分方程边值问题

$$\begin{cases} -\dfrac{d}{dx}\left[(x+1)\dfrac{du}{dx}\right] + 2u = 4x - x^2, \quad x \in (0,1) \\ u(0) = u'(1) = 0 \end{cases} \tag{3.6.1}$$

的解可以化为在函数类

$$D=\{v\in C^2((0,1))\cap C([0,1])|v(0)=0\}$$

中求变分问题

$$I(u)=\min_{v\in D}I(v) \tag{3.6.2}$$

的极值函数，其中

$$I(u)=\int_0^1\left\{\frac{x+1}{2}[u'(x)]^2+[u(x)]^2-(4x-x^2)u(x)\right\}dx. \tag{3.6.3}$$

设 D 中的函数可以展开成幂级数

$$u(x)=a_1x+a_2x^2+\cdots+a_kx^k+\cdots. \tag{3.6.4}$$

里斯方法就是在无穷级数 (3.6.4) 中取前面有限项的和作为近似解．如果取前 k 项，即在变分问题 (3.6.2) 中以

$$D_k=\{v=a_1x+a_2x^2+\cdots+a_kx^k|a_1,\cdots,a_k\in R\}$$

代替 D 而求变分问题

$$I(u_k)=\min_{v\in D_k}I(v) \tag{3.6.5}$$

的解 $u_k\in D_k$．为了具体计算，我们现在求含两项的近似解．以 $v=a_1x+a_2x^2\in D_2$ 代入 (3.6.3) 得出

$$\begin{aligned}I(v)=&\int_0^1\left\{\frac{x+1}{2}(a_1+2a_2x)^2+(a_1x+a_2x^2)^2\right\}dx\\&-\int_0^1\{(4x-x^2)(a_1x+a_2x^2)\}dx\\=&\int_0^1\left\{\left(\frac{x+1}{2}+x^2\right)a_1^2+2(x+x^2+x^3)a_1a_2)\right\}dx\\&+\int_0^1\{(2x^2+2x^3+x^4)a_2^2-(4x^2-x^3)a_1-(4x^3-x^4)a_2\}dx\end{aligned}$$

$$= \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{3}\right) a_1^2 + \left(1 + \frac{2}{3} + \frac{1}{2}\right) a_1 a_2$$

$$+ \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{5}\right) a_2^2 - \left(\frac{4}{3} - \frac{1}{4}\right) a_1 - \left(1 - \frac{1}{5}\right) a_2$$

$$= \frac{13}{12} a_1^2 + \frac{13}{6} a_1 a_2 + \frac{41}{30} a_2^2 - \frac{13}{12} a_1 - \frac{4}{5} a_2, \tag{3.6.6}$$

这是 a_1, a_2 的二次函数. 欲求变分问题 (3.6.5) 当 $k = 2$ 时的解 $v(x) = a_1 x + a_2 x^2$, 只需选取 a_1, a_2 使 (3.6.6) 取极小值，因此有

$$\begin{cases} \dfrac{\partial I(v)}{\partial a_1} = \dfrac{13}{6} a_1 + \dfrac{13}{6} a_2 - \dfrac{13}{12} = 0, \\ \dfrac{\partial I(v)}{\partial a_2} = \dfrac{13}{6} a_1 + \dfrac{41}{15} a_2 - \dfrac{4}{5} = 0. \end{cases}$$

解此线性方程组得出

$$a_1 = 1, \quad a_2 = -\frac{1}{2}.$$

于是得出了近似解

$$v(x) = x - \frac{x^2}{2}.$$

实际上，这个解就是边值问题 (3.6.1) 的精确解.

设 H 是可分的 Hilbert 空间， D_A 是 H 的稠密子空间， A 是 D_A 上的正定算子， H_A 是 D_A 关于内积

$$[u, v] = (Au, v)$$

所确定的范数

$$||u||_A = (Au, u)^{\frac{1}{2}}$$

的完备化. 上面的例子告诉我们，用里斯方法求微分方程边值问题的近似解的原理及步骤如下：

1. 将微分方程边值问题化为算子方程

$$Au = f, f \in H. \tag{3.6.7}$$

由定理 3.1.2 及定理 3.4.2 知道，求算子方程 (3.6.7) 的 (弱) 解等价于求使泛函

$$J(v)=\frac{1}{2}[v,v]-(f,v) \tag{3.6.8}$$

取极小值的极值函数.

2. 选取序列 $\{\varphi_k\}\subset D_A$ 使 $\{\varphi_k\}$ 成为 H_A 的一个基底 (下面将证明，只需选取 $\{\varphi_k\}\subset D_A$ 使 $\{A\varphi_k\}$ 为 H 的基底就行了). 这种函数列 $\{\varphi_k\}$ 称为 **坐标函数列**.

3. 将前 k 个坐标函数的线性组合

$$u_k=\sum_{i=1}^{k}a_i\varphi_i \tag{3.6.9}$$

作为 v 代入泛函 (3.6.8), 得出含 k 个参数 $a_1,a_2,\cdots,a_k$ 的二次函数

$$\begin{aligned}J(u_k)&=\frac{1}{2}[u_k,u_k]-(f,u_k)\\&=\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{k}a_ia_j[\varphi_i,\varphi_j]-\sum_{i=1}^{k}a_i(f,\varphi_i).\end{aligned} \tag{3.6.10}$$

选取 $a_1,a_2,\cdots,a_k$ 使上式取极小，即要求

$$\frac{\partial J(u)}{\partial a_i}=\sum_{j=1}^{k}a_j[\varphi_i,\varphi_j]-(f,\varphi_i)=0,\quad i=1,2,\cdots,k,$$

于是得出线性方程组

$$\sum_{j=1}^{k}[\varphi_i,\varphi_j]a_j=(f,\varphi_i),\quad i=1,2,\cdots,k. \tag{3.6.11}$$

4. 解线性方程组 (3.6.11) 得出 $a_1,a_2,\cdots,a_k$，把它们代入 (3.6.9) 即得出近似解 u_k.

我们看到，线性方程组 (3.6.11) 的系数行列式

$$\begin{vmatrix} [\varphi_1,\varphi_1] & [\varphi_1,\varphi_2] & \cdots & [\varphi_1,\varphi_k] \\ [\varphi_2,\varphi_1] & [\varphi_2,\varphi_2] & \cdots & [\varphi_2,\varphi_k] \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ [\varphi_k,\varphi_1] & [\varphi_k,\varphi_2] & \cdots & [\varphi_k,\varphi_k] \end{vmatrix}$$

是函数 $\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_k$ 的 Gram 行列式. 由于 $\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_k$ 是线性无关的，所以这个 Gram 行列式不为零，从而线性方程组 (3.6.11) 有唯一的解 $a_1,a_2,\cdots,a_k$.

可以把方程组 (3.6.11) 改写成

$$[u_k,\varphi_i]=(f,\varphi_i),\quad i=1,2,\cdots,k. \tag{3.6.12}$$

利用 Gram-Schmidt 正交化程序，我们可以将基底 $\{\varphi_k\}$ 化为 H_A 的规范正交基底 $\{\psi_k\}$, 其中

$$\psi_k=c_{k1}\varphi_1+c_{k2}\varphi_2+\cdots+c_{kk}\varphi_k, c_{kk}\neq 0, k=1,2,\cdots, \tag{3.6.13}$$

或者

$$\varphi_k=d_{k1}\psi_1+d_{k2}\psi_2+\cdots+d_{kk}\psi_k, c_{kk}\neq 0, k=1,2,\cdots, \tag{3.6.14}$$

设由基底 $\{\varphi_k\}$ 变到基底 $\{\psi_k\}$ 后，近似解 (3.6.9) 变成

$$u_k=\sum_{j=1}^{k}b_j\psi_j. \tag{3.6.15}$$

对方程组 (3.6.12) 的第 i 个方程乘以 c_{li}, 再对 i 从 1 到 k 求和，得出近似解 (3.6.9) 应满足线性方程组

$$[u_k,\psi_l]=(f,\psi_l),\quad l=1,2,\cdots,k. \tag{3.6.16}$$

这个方程组也是近似解 (3.6.15) 应满足的方程组. 由线性方程组解 (3.6.16) 的唯一性知道，对两组等价的基底 $\{\varphi_k\}$ 与 $\{\psi_k\}$, 用里斯方法求出的近似解 (3.6.9) 及 (3.6.15) 是相同的.

由于 $\{\psi_k\}$ 是 H_A 的规范正交基底，由 (3.6.15) 及 (3.6.16) 得出

$$b_i = \sum_{j=1}^{k} b_j[\psi_j, \psi_i] = [u_k, \psi_i] = (f, \psi_i) \quad (1 \le i \le k).$$

以此式代入 (3.6.15) 得出近似解

$$u_k = \sum_{j=1}^{k} (f, \psi_j)\psi_j. \tag{3.6.17}$$

现在证明: 对 H_A 的规范正交基底 $\{\psi_i\}$, 用里斯方法求出的近似解 (3.6.17) 恰好是精确解关于 $\{\psi_i\}$ 的 Fourier 级数的前 k 项之和. 根据定理 3.4.2, 对泛函 (3.6.8), 变分问题

$$J(u) = \min_{v \in H_A} J(v)$$

有唯一精确解 $u \in H_A$, 它满足

$$[u, v] = (f, v), \quad \forall v \in H_A.$$

由此知

$$[u, \psi_i] = (f, \psi_i), \quad i = 1, 2, \cdots.$$

于是，由定理 2.3.2, 精确解 u 可以展为 H_A 的规范正交基底 $\{\psi_i\}$ 的 Fourier 级数如

$$u = \sum_{i=1}^{\infty} [u, \psi_i]\psi_i = \sum_{i=1}^{\infty} (f, \psi_i)\psi_i. \tag{3.6.18}$$

这就证明了近似解 (3.6.17) 是精确解的 Fourier 级数 (3.6.18) 的前 k 项之和.

由 H_A 中的元素 $\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_k$ 的所有线性组合组成 H_A 的一个子空间，叫做 $\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_k$ 生成的子空间，记为 $V_k = \mathrm{span}\{\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_k\}$. 于是，方程组 (3.6.12) 可改写成

$$[u_k, v] = (f, v), \quad \forall v \in V_k. \tag{3.6.19}$$

定理 3.6.1 对 H_A 上的泛函 (3.6.8), 设 $u \in H_A$ 是变分问题

$$J(u) = \min_{v \in H_A} J(v) \tag{3.6.20}$$

的解. V_k 是 H_A 的 k 维子空间, $u_k \in V_k$ 是变分问题

$$J(u_k) = \min_{v \in V_k} J(v) \tag{3.6.21}$$

的解, 那么 u_k 是 u 在 V_k 上的投影, 即

$$||u - u_k||_A = \text{dist}(u, V_k). \tag{3.6.22}$$

证 因为 u 是变分问题 (3.6.20) 的解, 由定理 3.4.2 得

$$[u, v - u_k] = (f, v - u_k), \quad \forall v \in V_k. \tag{3.6.23}$$

又因 u_k 是变分问题 (3.6.21) 的解, 由 (3.6.19) 有

$$[u_k, v - u_k] = (f, v - u_k), \quad \forall v \in V_k. \tag{3.6.24}$$

将 (3.6.23) 及 (3.6.24) 相减得出

$$[u - u_k, v - u_k] = 0, \quad \forall v \in V_k.$$

因此

$$\begin{aligned} ||u - u_k||_A^2 &= [u - u_k, u - v] + [u - u_k, v - u_k] \\ &= [u - u_k, u - v] \\ &\le ||u - u_k||_A ||u - v||_A, \quad \forall v \in V_k. \end{aligned}$$

从而有

$$||u - u_k||_A \le ||u - v||_A, \quad \forall v \in V_k.$$

于是

$$\text{dist}(u, V_k) \le ||u - u_k||_A \le \inf_{v \in V_k} ||u - v||_A = \text{dist}(u, V_k).$$

由此得出等式 (3.6.22). 证完.

设 $f \in H$. 对任意 $v \in H_A$ 有

$$(f,v) \le ||f||\,||v|| \le \frac{\gamma^2}{2}||v||^2 + \frac{1}{2\gamma^2}||f||^2.$$

因此，对泛函 (3.6.8) 利用不等式 (3.4.10) 得出

$$\begin{aligned} J(v) &= \frac{1}{2}[v,v] - (f,v) \\ &\ge \frac{\gamma^2}{2}||v||^2 - \left(\frac{\gamma^2}{2}||v||^2 + \frac{1}{2\gamma^2}||f||^2\right) \\ &= -\frac{1}{2\gamma^2}||f||^2. \end{aligned}$$

即 $J(v)$ 在 H_A 上是有下界的.

定义 设 $d = \inf\limits_{v \in H_A} J(v)$. 如果序列 $\{u_k\} \subset D_A$ 满足

$$J(u_1) \ge J(u_2) \ge \cdots \ge J(u_k) \ge J(u_{k+1}) \ge \cdots, \tag{3.6.25}$$

$$J(u_k) \to d, \quad 当k \to \infty, \tag{3.6.26}$$

则称 $\{u_k\}$ 是泛函 $J(v)$ 的 **极小化序列**.

定理 3.6.2 设算子 A 在 D_A 上正定，$\{\varphi_k\} \subset D_A$, 且 $\{\varphi_k\}$ 是 H_A 的基底，u_k 是用里斯方法求出的变分问题 (3.6.20) 的近似解. 那么，$\{u_k\}$ 是泛函 $J(u)$ 的极小化序列，且当 $t \to \infty$ 时，u_k 在 H_A 中 (也在 H 中) 收敛于变分问题 (3.6.20) 的解 u.

证 因为 $\{\varphi_k\}$ 为 H_A 的基底, 根据 Gram-schmidt 正交化法可以得出 H_A 的规范正交基底 $\{\psi_k\} \subset D_A$, 使得对所有 $k = 1, 2, \cdots$, 有

$$V_k = \text{span}\{\varphi_1, \cdots, \varphi_k\} = \text{span}\{\psi_1, \cdots, \psi_k\}.$$

对变分问题 (3.6.20) 的解 $u \in H_A$, 由定理 2.3.2,u 可以展开成 $\{\psi_k\}$ 的 Fourier 级数

$$u = \sum_{i=1}^{\infty}[u, \psi_i]\psi_i.$$

因此；对于有限和

$$u_k = \sum_{i=1}^{k} [u, \psi_i] \psi_i \in V_k$$

有

$$u_k \to u, \quad 在 H_A 中. \tag{3.6.27}$$

由此，利用不等式 (3.4.10) 可得

$$u_k \to u, \quad 在 H 中.$$

因为

$$V_1 \subset V_2 \subset \cdots \subset V_k \subset \cdots \subset H_A,$$

于是

$$\inf_{v \in V_1} J(v) \geq \inf_{v \in V_2} J(v) \geq \cdots \geq \inf_{v \in V_k} J(v) \geq \cdots \geq \inf_{v \in H_A} J(v) = d.$$

此不等式，根据 (3.6.20) 及 (3.6.21), 可改写成

$$J(u_1) \geq J(u_2) \geq \cdots \geq J(u_k) \geq \cdots \geq J(u) = d. \tag{3.6.28}$$

根据 $J(v)$ 的表达式 (3.6.8) 及 (3.6.27), 由上式得出

$$\begin{aligned} 0 &\leq J(u_k) - J(u) \\ &= \frac{1}{2}[u_k, u_k] - (f, u_k) - \frac{1}{2}[u, u] + (f, u) \\ &= \frac{1}{2}(||u_k||_A^2 - ||u||_A^2) - (f, u_k - u) \\ &\leq \frac{1}{2}(||u_k||_A^2 - ||u||_A^2) + ||f||||u_k - u|| \\ &\to 0, \quad 当 k \to \infty. \end{aligned}$$

由此式及 (3.6.28) 得出

$$J(u_k) \to J(u) = d = \inf_{v \in H_A} J(v).$$

此式及 (3.6.28) 说明 $\{u_k\}$ 是泛函 $J(v)$ 的极小化序列. 证完.

下面的定理说明：当序列 $\{u_k\} \subset D_A$ 时，只要 $\{A\varphi_k\}$ 是 H 的基底，则 $\{\varphi_k\}$ 可以选作坐标函数列.

定理 3.6.3 设 A 是 D_A 上的正定算子，序列 $\{\varphi_k\} \subset D_A$. 如果 $\{A\varphi_k\}$ 是 H 的基底，则 $\{\varphi_k\}$ 是 H_A 的基底.

证 设 $\{A\varphi_k\}$ 是 H 的基底. 对任意 k, 如果有

$$a_1\varphi_1 + a_2\varphi_2 + \cdots + a_k\varphi_k = 0,$$

则由 A 是线性算子，以 A 作用于上式得出

$$a_1A\varphi_1 + a_2A\varphi_2 + \cdots + a_kA\varphi_k = 0.$$

由于 $A\varphi_1, A\varphi_2, \cdots, A\varphi_k$ 是线性无关的，故有

$$a_1 = a_2 = \cdots = a_k = 0$$

这就证明了 $\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_k$ 在 H_A 中是线性无关的. 因为由 k 的任意性知道序列 $\{\varphi_k\}$ 在 H_A 中是线性无关的.

再证明 $\{\varphi_k\}$ 是 H_A 的基底. 设有 $v \in H_A$, 使得

$$[\varphi_k, v] = 0, \quad k = 1, 2, \cdots. \tag{3.6.29}$$

由内积 $[\cdot,\cdot]$ 的定义 (3.4.5) 得出

$$(A\varphi_k, v) = [\varphi_k, v] = 0, \quad k = 1, 2, \cdots.$$

因 $\{A\varphi_k\}$ 是 H 的基底. 且 $v \in H_A \subset H$, 由上式及基底的定义 (见 2.3 节定义 3) 得出 $v = 0$. 这就证明了 H_A 中满足条件 (3.6.29) 的元素 v 必为零，即 $\{\varphi_k\}$ 是 H_A 的基底.

例 2 下端固定而上端受力矩作用发生扭转的柱体，其应力函数 $\varphi(x,y)$ 满足 Poisson 方程及零边界条件

$$\begin{cases} \triangle\varphi = 2G\theta, & \text{在}\Omega\text{内}, \\ \varphi = 0, & \text{在}\partial\Omega\text{ 上}, \end{cases} \tag{3.6.30}$$

其中 G 为柱体的剪切弹性模量， θ 为柱体单位长度的扭转角. 设柱体截面积为矩形

$$\Omega=\{(x,y)|0<x<a,0<y<b\}.$$

解边值问题 (3.6.30) 等价于解变分问题

$$I(\varphi)=\min_{\psi\in D_\triangle} I(\psi),$$

其中 $D_\triangle=\{\psi\in C^2(\Omega)\cap C^0(\overline{\Omega})|\psi=0,在\partial\Omega\ 上\}$, 而

$$\begin{aligned}I(\psi)&=\frac{1}{2}[\psi,\psi]+(2G\theta,\psi)\\&=\frac{1}{2}\int_0^a\int_0^b\left[\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)^2\right]dxdy+\int_0^a\int_0^b 2G\theta\psi dxdy.\end{aligned}\tag{3.6.31}$$

$D_\triangle$ 中的函数可以展开成三角级数

$$\varphi(x,y)=\sum_{m,n=1}^{\infty}a_{mn}\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}.$$

因此可取坐标函数列

$$\varphi_{jl}=\sin\frac{j\pi x}{a}\sin\frac{l\pi y}{b}\quad(j,l=1,2,\cdots).\tag{3.6.32}$$

作近似解

$$\varphi_k(x,y)=\sum_{j,l=1}^{k}a_{jl}\varphi_{jl}(x,y)=\sum_{j,l=1}^{k}a_{jl}\sin\frac{j\pi x}{a}\sin\frac{l\pi y}{b}.$$

把此式代入 (3.5.31) 得出

$$\begin{aligned}I(\varphi_k)=&\frac{1}{2}\int_0^a\int_0^b\left[\left(\sum_{j,l=1}^{k}a_{jl}\frac{\partial\varphi_{jl}}{\partial x}\right)^2+\left(\sum_{j,l=1}^{k}a_{jl}\frac{\partial\varphi_{jl}}{\partial y}\right)^2\right]dxdy\\&+2G\theta\int_0^a\int_0^b a_{jl}\varphi_{jl}dxdy.\end{aligned}$$

选取 $a_{jl}(j,l=1,2,\cdots,k)$, 使上列函数取极小值，其必要条件是

$$\frac{\partial I(\varphi_k)}{\partial a_{mn}}=\int_0^a\int_0^b\left(\sum_{j,l=1}^{k}a_{jl}\frac{\partial \varphi_{jl}}{\partial x}\frac{\partial \varphi_{mn}}{\partial x}+\sum_{j,l=1}^{k}a_{jl}\frac{\partial \varphi_{jl}}{\partial y}\frac{\partial \varphi_{mn}}{\partial y}\right)dxdy$$

$$+2G\theta\int_0^a\int_0^b\varphi_{mn}dxdy=0\quad(m,n=1,2,\cdots,k),$$

也就是

$$\sum_{j,l=1}^{k}a_{jl}\int_0^a\int_0^b\left(\frac{\partial \varphi_{jl}}{\partial x}\frac{\partial \varphi_{mn}}{\partial x}+\frac{\partial \varphi_{jl}}{\partial y}\frac{\partial \varphi_{mn}}{\partial y}\right)dxdy$$

$$=-2G\theta\int_0^a\int_0^b\varphi_{mn}dxdy=0\quad(m,n=1,2,\cdots,k).$$

将 (3.6.32) 代入上式，注意

$$\frac{2}{a}\int_0^a\cos\frac{j\pi x}{a}\cos\frac{m\pi x}{a}dx=\delta_{jm},$$

$$\frac{2}{a}\int_0^a\sin\frac{j\pi x}{a}\sin\frac{m\pi x}{a}dx=\delta_{jm},$$

得出

$$a_{mn}\left[\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2\right]\frac{ab}{4}$$

$$=-2G\theta\frac{a}{m\pi}[1-(-1)^m]\frac{b}{n\pi}[1-(-1)^n].$$

由此得

$$a_{mn}=\begin{cases}0, & 当mn偶数,\\ -\dfrac{32G\theta a^2b^2}{\pi^4mn(a^2n^2+b^2m^2)}, & 当mn奇数,\end{cases}$$

于是得出近似解

$$\varphi_k(x,y)=-\frac{32G\theta a^2b^2}{\pi^4}\sum_{m,n=1,3,5,\cdots\le k}\frac{\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}}{mn(a^2n^2+b^2m^2)}.$$

不难验证，上式中令 $k \to \infty$ 得出的极限函数

$$\varphi(x,y) = -\frac{32G\theta a^2 b^2}{\pi^4} \sum_{m,n=1,3,5,\cdots} \frac{\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}}{mn(a^2n^2+b^2m^2)}$$

就是边值问题 (3.6.30) 的精确解.

例 3 关于边界固定的矩形平板的弯曲，由 3.1 节例 2 知道，其挠度 $w(x,y)$ 是下列边值问题的解

$$\begin{aligned} &\triangle^2 w = \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{q}{D}, \text{在}\Omega\text{内}, \\ &w = \frac{\partial w}{\partial n} = 0, \text{在}\partial\Omega \text{ 上}, \end{aligned} \tag{3.6.33}$$

且当 $H = L^2(\Omega)$ 时，$\triangle^2$ 在

$$B_0^4 = \left\{ u \in C^4(\Omega) \cap C^3(\overline{\Omega}) \middle| u = \frac{\partial u}{\partial n} = 0, \text{在}\partial\Omega \text{ 上} \right\}$$

上为正定算子. 定理 3.1.2 告诉我们，边值问题 (3.6.33) 在 B_0^4 中的解就是泛函

$$I(w) = \frac{1}{2}\int\int_\Omega (\triangle w)^2 dxdy - \int\int_\Omega \frac{q}{D} w dxdy$$

在 B_0^4 中的极值函数. 设 q 为均布荷载 (即 q 为常数), 取矩形平板的中心为坐标原点，坐标轴平行于平板的边，则可设

$$\Omega = \{(x,y) \in R^2 | -a < x < a, -b < x < b\}.$$

设挠度 $w(x,y)$ 可以展开成 x 与 y 的幂级数. 由于荷载是对称的，挠度一定是 x 与 y 的偶函数，即 $w(x,y)$ 中不含 x 与 y 的奇次项. 再由边界条件知道：解 $w(x,y)$ 可以展开成下列形状

$$w(x,y) = (a^2-x^2)^2(b^2-y^2)^2(a_1 + a_2x^2 + a_3y^2 + \cdots).$$

如果在此式中取三项，即将

$$\begin{aligned} w_3(x,y) &= (a^2-x^2)^2(b^2-y^2)^2(a_1 + a_2x^2 + a_3y^2) \\ &= a_1\varphi_1 + a_2\varphi_2 + a_3\varphi_3 \end{aligned} \tag{3.6.34}$$

作为近似解，其中

$$\varphi_1=(a^2-x^2)^2(b^2-y^2)^2,\varphi_2=x^2\varphi_1,\varphi_3=y^2\varphi_1. \qquad (3.6.35)$$

根据 (3.6.11), 近似解 (3.6.34) 满足的方程组是

$$\sum_{j=1}^{3}a_j\int_{-a}^{a}\int_{-b}^{b}\triangle\varphi_i\triangle\varphi_j dxdy=\frac{q}{D}\int_{-a}^{a}\int_{-b}^{b}\varphi_i dxdy,\ i=1,2,3.$$

以坐标函数 (3.6.35) 代入此方程组，并记 $r=\dfrac{b}{a}$, 经过计算得出线性方程组

$$\begin{cases}\left(r^2+\dfrac{1}{r^2}+\dfrac{4}{7}\right)a_1+\left(\dfrac{1}{7}+\dfrac{1}{11r^2}\right)b^2a_2+\left(\dfrac{1}{7}+\dfrac{r^4}{11}\right)a^2a_3\\ \qquad =\dfrac{7q}{128a^2b^2D},\\ \left(\dfrac{r^2}{7}+\dfrac{1}{11r^2}\right)a_1+\left(\dfrac{3}{7}+\dfrac{4}{77r^2}+\dfrac{3}{143r^4}\right)b^2a_2+\dfrac{1}{77}(1+r^4)a^2a_3\\ \qquad =\dfrac{q}{128a^2b^2D},\\ \left(\dfrac{1}{7r^2}+\dfrac{r^2}{11}\right)a_1+\dfrac{1}{77}\left(1+\dfrac{1}{r^4}\right)b^2a_2+\left(\dfrac{3}{7}+\dfrac{4r^2}{77}+\dfrac{3r^4}{143}\right)a^2a_3\\ \qquad =\dfrac{q}{128a^2b^2D}.\end{cases}$$

解此线性方程组求出 a_1,a_2,a_3 就得出近似解 (3.6.34).

如果平板是正方形的，即当 $a=b,r=1$ 时，上列方程组变为

$$\begin{cases}\dfrac{18}{7}a_1+\dfrac{18}{77}a^2a_2+\dfrac{18}{77}a^2a_3=\dfrac{7q}{128a^4D},\\ \dfrac{18}{77}a_1+\dfrac{502}{1001}a^2a_2+\dfrac{2}{77}a^2a_3=\dfrac{q}{128a^4D},\\ \dfrac{18}{77}a_1+\dfrac{2}{77}a^2a_2+\dfrac{502}{1001}a^2a_3=\dfrac{q}{128a^4D}.\end{cases}$$

解这个线性方程组得出

$$a_1 = \frac{0.02067q}{a^4 D}, \quad a_2 = a_3 = \frac{0.0038q}{a^6 D}.$$

以此等值代入 (3.6.34) 得出近似解

$$w_3(x,y) = (a^2 - x^2)^2 (b^2 - y^2)^2 \left(0.02067 + 0.0038\frac{x^2 + y^2}{a^2}\right) \frac{q}{a^4 D}.$$

由此知道平板中心的挠度为

$$w_3(0,0) = 0.02067\frac{a^4 q}{D}.$$

最后指出，对实际问题用 Riesz 方法求解时，困难在于满足边界条件的坐标函数列是否选得出来；而且计算的繁简和近似解精确的程度与坐标函数列的不同选取有密切的关系；如果坐标函数列选得好，近似解只需取少数几项就可以达到较高的精确度.

3.7 Galerkin 方法

在上一节中，求算子方程 $Au = f$ 的近似解的 Riesz 方法可概括为：对正定算子 A, 选取坐标函数列 $\{\varphi_k\} \subset D_A$，则算子方程 $Au = f$ 的近似解为 $u_k = \sum\limits_{i=1}^{k} a_i \varphi_i$, 这里的系数 $a_1, a_2, \cdots, a_k$ 是线性方程组 (3.6.12) 的解. 根据 (3.4.5), 方程组 (3.6.12) 可改写成

$$(Au_k, \varphi_i) = (f, \varphi_i), \quad i = 1, 2, \cdots, k. \tag{3.7.1}$$

由此看来，不管线性算子 A 是不是正定的，如果我们可以从线性方程组 (3.7.1) 解出 $a_1, a_2, \cdots, a_k$, 我们就把函数 $u_k = \sum\limits_{i=1}^{k} a_i \varphi_i$ 看成是算子方程 $Au = f$ 的近似解. 这种近似解的方法就是著名的 Galerkin 方法.

在力学中， Riesz 方法对应于最小势能原理. 而 Galerkin 方法对应于虚功原理.

设 H 是 Hilbert 空间, A 是 H 的线性稠密子空间 D_A 上的正定算子, K 是 $H_A \to H$ 的线性算子, $L = A + K$. 用伽辽金方法求算子方程

$$Lu = f, \quad f \in H \tag{3.7.2}$$

的近似解的思想和步骤是:

1. 选取坐标函数列 $\{\varphi_k\} \subset D_A$ 使得 $\{\varphi_k\}$ 是 H_A 的一个基 (或 $\{A\varphi_k\}$ 是 H 的一个基).

2. 将算子方程的近似解表示成

$$u_k = \sum_{i=1}^{k} a_i \varphi_i \tag{3.7.3}$$

的形状, 把它代入 (3.7.2) 后得 $Lu_k = f$, 再两端对 φ_i 作内积就得到以 (3.7.3) 的系数为未知量的方程组

$$(Lu_k, \varphi_i) = (f, \varphi_i), i = 1, 2, \cdots, k. \tag{3.7.4}$$

3. 解线性方程组 (3.7.4) 得出 $a_1, a_2, \cdots, a_k$ 之值, 从而得出近似解 (3.7.3).

很明显, Galerkin 方法比 Riesz 方法更简便些, 因为它不需要把微分方程边值问题化为变分问题, 而且 Galerkin 方法的应用范围也更广泛一些, 因为有些微分方程边值问题不能化为变分问题, 因而不能用 Riesz 方法, 但它们却可用 Galerkin 方法求近似解.

上节的例子都可以用 Galerkin 方法求解, 这里我们再举一个用伽辽金方法解常微分方程边值问题的例子.

例如, 对常微分方程边值问题

$$\begin{cases} Lu = u'' + u = -x, \quad x \in (0,1), \\ u(0) = u(1) = 0, \end{cases} \tag{3.7.5}$$

由边界条件知道, 如果解 $u(x)$ 可以展开成 x 的幂级数, 则它必可表示为

$$u(x) = x(1-x)(a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + \cdots).$$

取坐标函数列

$$\varphi_1 = x(1-x), \varphi_2 = x^2(1-x), \varphi_3 = x^3(1-x), \cdots. \tag{3.7.6}$$

今用伽辽金方法求近似解

$$u_2(x) = a_1\varphi_1(x) + a_2\varphi_2(x). \tag{3.7.7}$$

由 (3.7.4), 系数 a_1, a_2 满足线性方程组

$$\int_0^1 (Lu_2)\varphi_i dx = \int_0^1 (-x)\varphi_i dx, \quad i = 1, 2.$$

以 (3.7.7) 代入上式后得出

$$a_1 \int_0^1 (L\varphi_1)\varphi_i dx + a_2 \int_0^1 (L\varphi_2)\varphi_i dx = \int_0^1 (-x)\varphi_i dx, i = 1, 2.$$

再以坐标函数 (3.7.6) 代入此式得

$$\begin{cases} a_1 \int_0^1 [-2 + x(1-x)]x(1-x)dx + a_2 \int_0^1 [2 - 6x \\ +x^2(1-x)]x(1-x)dx = -\int_0^1 x^2(1-x)dx, \\ a_1 \int_0^1 [-2 + x(1-x)]x^2(1-x)dx + a_2 \int_0^1 [2 - 6x \\ +x^2(1-x)]x^2(1-x)dx = -\int_0^1 x^3(1-x)dx. \end{cases}$$

利用 β 函数的公式

$$\int_0^1 x^k(1-x)^m dx = \frac{k!m!}{(k+m+1)!},$$

化简上面的方程组得出

$$\begin{cases} \frac{3}{10}a_1 + \frac{3}{20}a_2 = \frac{1}{12}, \\ \frac{3}{20}a_1 + \frac{13}{105}a_2 = \frac{1}{20}. \end{cases}$$

解此线性方程组得

$$a_1 = \frac{71}{369}, \quad a_2 = \frac{7}{41}.$$

于是得出了边值问题 (3.7.5) 的近似解

$$u_2(x) = x(1-x)\left(\frac{71}{369} + \frac{7}{41}x\right).$$

边值问题 (3.7.5) 的精确解是

$$u(x) = \frac{\sin x}{\sin 1} - x.$$

今取几个特殊值把近似解 $u_2(x)$ 与精确解 $u(x)$ 进行比较如下:

$$u_2\left(\frac{1}{4}\right) = 0.044, \quad u\left(\frac{1}{4}\right) = 0.044,$$

$$u_2\left(\frac{1}{2}\right) = 0.069, \quad u\left(\frac{1}{2}\right) = 0.070,$$

$$u_2\left(\frac{3}{4}\right) = 0.060, \quad u\left(\frac{3}{4}\right) = 0.060.$$

由此可见, 虽然上述近似解 $u_2(x)$ 只取了两项, 但对于精确解的误差并不大 (绝对误差 ≤ 0.001, 相对误差 $\leq 1.5\%$).

下面我们讨论 Galerkin 方法的收敛性.

像 3.4 节那样, H_A 是 D_A 关于内积和范数

$$[u,v] = (Au, v), \quad ||u||_A = [u,u]^{\frac{1}{2}}$$

完备化得到的 Hilbert 空间, 等式

$$[Gf, v] = (f, v), \quad \forall v \in H_A \tag{3.7.8}$$

定义了一个 $H \to H_A$ 的线性有界算子 $G = A^{-1}$, 它满足

$$GA = I, AG = I. \tag{3.7.9}$$

由于 Galerkin 方法近似解 (3.7.3) 的系数 $a_1,a_2,\cdots,a_k$ 由线性方程组 (3.7.4) 确定，仿 3.6 节，根据 Gram-schmidt 正交化程序，由 (3.6.13) 将 $\{\varphi_k\}$ 化为 H_A 的规范正交基底 $\{\psi_k\}$；在基底 $\{\psi_k\}$ 下，近似解 (3.7.3) 变为 (3.6.15), 而方程组 (3.7.4) 变为

$$(Lu_k,\psi_l)=(f,\psi_l),\quad l=1,2,\cdots,k.$$

也就是说，对两组坐标函数列 $\{\varphi_k\}$ 及 $\{\psi_k\}$, 用 Galerkin 方法得出的近似解是相同的. 因此，我们不妨假定 $\{\varphi_k\}$ 就是 H_A 的规范正交基底.

取定 H_A 的规范正交基底 $\{\varphi_k\}$, 任意函数 $u\in H_A$ 可以表示成

$$u=\sum_{i=1}^{\infty}[u,\varphi_i]\varphi_i=S_ku+R_ku, \tag{3.7.10}$$

其中 S_k 及 R_k 均为 H_A 上的线性算子，它们由下列两个等式定义

$$S_ku=\sum_{i=1}^{k}[u,\varphi_i]\varphi_i,\ R_ku=\sum_{i=k+1}^{\infty}[u,\varphi_i]\varphi_i. \tag{3.7.11}$$

于是贝塞耳不等式成立：

$$||S_ku||_A^2=\sum_{i=1}^{k}[u,\varphi_i]^2\le||u||_A^2. \tag{3.7.12}$$

引理 3.7.1 如果 M 是 H_A 的紧子集，则对任意 $\epsilon>0$, 存在正整数 $K=K(M,\epsilon)$, 使得当 $k>K$ 时有

$$||R_ku||_A<\epsilon,\quad \forall u\in M. \tag{3.7.13}$$

证 对任意 $\epsilon>0$, 令 $\delta=\frac{\epsilon}{4}$. $\{B_\delta(x)|x\in M\}$ 是 M 的一个开覆盖，由于 M 是 H_A 的紧子集，存在 M 的有限覆盖 $\{B_\delta(v_i)|v_i\in M,i=1,2,\cdots,s\}$；也就是说，对任意 $u\in M$, 存在 $v_i=v_i(u)(1\le i\le s)$ 使得 $u\in B_\delta(v_i)$, 即

$$||u-v_i||_A<\delta. \tag{3.7.14}$$

由于 $R_i u$ 是级数 (3.7.10) 的余项, 因此, 存在正整数 $K = K(M, \epsilon)$, 使得 $k > K$ 时有

$$||R_k v_i||_A \le \frac{\epsilon}{2}, \quad i = 1, 2, \cdots, s. \tag{3.7.15}$$

由 (3.7.10),(3.7.14),(3.7.12) 及 (3.7.15), 对任意的 $u \in M$ 及相应的 $v_i = v_i(u)$, 当 $k > K(M, \varepsilon)$ 时有

$$\begin{aligned}||R_k u||_A &= ||u - S_k u||_A \\ &= ||u - v_i + S_k v_i + R_k v_i - S_k u||_A \\ &\le ||u - v_i||_A + ||S_k(u - v_i)||_A + ||R_k v_i||_A \\ &< \delta + ||u - v_i||_A + \frac{\epsilon}{2} < \delta + \delta + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.\end{aligned}$$

引理 3.7.2 设 T 是 H_A 的线性紧算子, 则由

$$T_k: \quad u \to \sum_{i=1}^{k} [Tu, \varphi_i]\varphi_i = S_k(Tu) = T_k u$$

定义的算子 $T_k : H_A \to H_A$ 有

$$||T - T_k|| \to 0, \quad 当 k \to \infty.$$

证 记 $S = \{u \in H_A | ||u||_A = 1\}$, 因为 T 是 H_A 上的紧算子, 则 $M = TS = \{Tu | u \in S\}$ 是 H_A 的紧子集, 由引理 3.7.1, 对任意 $\epsilon > 0$, 存在正整数 $K = K(\epsilon) = K(M, \epsilon)$, 使得当 $k > K$ 时有

$$||R_k(Tu)||_A < \epsilon, \quad \forall u \in S.$$

从而得出

$$\begin{aligned}||T - T_k|| &= \sup_{u \in S} ||(T - T_k)u||_A \\ &= \sup_{u \in S} ||Tu - S_k(Tu)||_A \\ &= \sup_{u \in S} ||R_k(Tu)||_A < \epsilon.\end{aligned}$$

证完.

现在我们来证明下面的 Galerkin 方法近似解的收敛性定理.

定理 3.7.3 设 A 是 D_A 上的正定算子, $G=A^{-1}$(为 $H\to H_A$ 的线性有界算子),K 是 $H_A\to H$ 的线性算子, $T=GK$ 是 H_A 上的紧算子. 如果 $L=A+K$ 且齐次方程

$$Lu=0 \tag{3.7.16}$$

只有零解, 那么

(i) 方程

$$Lu=f,\quad \forall f\in H \tag{3.7.17}$$

有唯一的弱解 (广义解)$u\in H_A$, 它满足

$$[u,v]+(Ku,v)=(f,v),\quad \forall v\in H_A. \tag{3.7.18}$$

(ii) 当坐标函数列 $\{\varphi_k\}$ 取定后, 对适当大的 k , 方程 (3.7.17) 有唯一的 Galerkin 方法近似解 $u_k\in D_A$, 它满足方程组 (3.7.4).

(iii) 当 $k\to\infty$ 时有 $||u_k-u||_A\to 0$.

证 (i) 因为方程

$$Au+Ku=Lu=0$$

只有零解, 即方程

$$u+Tu=u+GKu=0$$

只有零解. 因此, 由于 $T=GK$ 是 H_A 上的线性紧算子, 根据 Fredholm 定理 2.5.1 知道: 对任意 $f\in H$, 方程

$$u+Tu=Gf\in H_A \tag{3.7.19}$$

有唯一解 $u\in H_A$, 且算子 $\Gamma=(I+T)^{-1}$ 是 H_A 上的线性有界算子. 而方程 (3.7.19) 等价于方程

$$[u,v]+[GKu,v]=[Gf,v],\quad \forall v\in H_A.$$

再根据算子 G 的定义 (3.7.8) 知道，上面的方程又等价于方程 (3.7.18).

(ii) 设 $\{\varphi_k\} \subset D_A$ ，且 $\{\varphi_k\}$ 是 H_A 的规范正交基底，记 $V_k = \text{span}\{\varphi_1, \cdots, \varphi_k\}$, 则方程 (3.7.17) 的 Galerkin 方法近似解

$$u_k = \sum_{i=1}^{k} a_i \varphi_i \in D_A \tag{3.7.20}$$

满足方程组 (3.7.4), 即

$$(Au_k, \varphi_i) + (Ku_k, \varphi_i) = (f, \varphi_i), i = 1, 2, \cdots, k. \tag{3.7.21}$$

记 $Gf = g$, 由 (3.7.8), 上式可写成

$$[u_k, \varphi_i] + [Tu_k, \varphi_i] = [g, \varphi_i], \quad i = 1, 2, \cdots, k. \tag{3.7.22}$$

由于 $\{\varphi_k\}$ 是 H_A 的规范正交基底，由 (3.7.20) 得

$$[u_k, \varphi_i] = a_i, \quad u_k = \sum_{i=1}^{k} [u_k, \varphi_i] \varphi_i.$$

根据引理 3.7.2 中 T_k 的定义有

$$T_k u_k = \sum_{i=1}^{k} [Tu_k, \varphi_i] \varphi_i \in V_k.$$

由算子 S_k 的定义 (3.7.11), 记

$$g_k = S_k g = u_k = \sum_{i=1}^{k} [g, \varphi_i] \varphi_i \in V_k.$$

将 (3.7.22) 与 φ_i 做数乘，然后对 i 从 1 到 k 求和得出

$$u_k + T_k u_k = g_k. \tag{3.7.23}$$

如果方程

$$v + T_k v = h, \quad \forall h \in H_A \tag{3.7.24}$$

有唯一解 $v \in H_A$, 则方程 (3.7.23) 有唯一解 $v_k \in H_A$. 由 $g_k, T_k u_k \in V_k$ 得出 $u_k = g_k - T_k u_k \in V_k$. 再由方程 (3.7.23) 与 (3.7.4) 是等价的，从而方程 (3.7.4) 有唯一的解 $u_k \in V_k$, 即方程 (3.7.17) 有唯一的 Galerkin 方法近似解 (3.7.20). 因此，我们只需证明：对适当大的 k, 方程 (3.7.24) 有唯一的解 $v \in H_A$. 把方程 (3.7.24) 改写成

$$v + Tv - (T - T_k)v = h,$$

以 $\varGamma = (I + T)^{-1}$ 作用于此方程得出

$$v - B_k v = \varGamma h, \quad B_k = \varGamma(T - T_k). \tag{3.7.25}$$

由引理 3.7.2 有

$$||B_k|| \leq ||\varGamma|| ||T - T_k|| \to 0, \quad 当 k \to \infty. \tag{3.7.26}$$

因此，存在正整数 k_0 使得：当 $k \geq k_0$ 时有 $||B_k|| < 1$, 由定理 2.2.2 知道 $(I - B_k)^{-1}$ 存在，即方程 (3.7.25) 有唯一解. 再由方程 (3.7.24) 与 (3.7.25) 的等价性得出：当 $k \geq k_0$ 时，方程 (3.7.24) 有唯一的解.

(iii) 因为方程 (3.7.19) 等价于方程 (3.7.17),(i) 中已经证明 (3.7.19) 有唯一解，从而算子 $I + T$ 的逆算子 $\varGamma = (I + T)^{-1}$ 存在，且方程 (3.7.17) 的解可以表示成

$$u = \varGamma g = (I + T)^{-1} g, \quad g = Gf. \tag{3.7.27}$$

因为方程 (3.7.24) 当 $k \geq k_0$ 时有唯一的解，即当 $k \geq k_0$ 时，$\varGamma_k = (I + T_k)^{-1}$ 存在，从而由方程 (3.7.23) 得出 Galerkin 方法近似解 u_k 可以表示成

$$u_k = \varGamma_k g_k = (I + T_k)^{-1} g_k. \tag{3.7.28}$$

由 (3.7.28) 及 (3.7.27) 得出

$$\begin{aligned} ||u_k - u||_A &= ||(\varGamma_k - \varGamma) g_k + \varGamma(g_k - g)||_A \\ &\leq ||\varGamma_k - \varGamma|| \, ||g_k||_A + ||\varGamma|| \, ||g_k - g||_A. \end{aligned} \tag{3.7.29}$$

由 (3.7.12) 及定理 2.3.3 有

$$||g_k||_A = ||S_k g||_A \le ||g||_A, \quad ||g_k - g||_A \to 0, \quad 当\ k \to \infty.$$

又因为 Γ 是线性有界算子，如果我们能证明

$$||\Gamma_k - \Gamma|| \to 0, \quad 当\ k \to \infty. \tag{3.7.30}$$

则由 (3.7.29) 得出 $||u_k - u||_A \to 0$, 当$k \to \infty$.

我们现在来证明 (3.7.30). 由 (3.7.25) 及 $\Gamma = (I+T)^{-1}$ 得出

$$I - B_k = I - \Gamma[(I+T) - (I+T_k)] = \Gamma(I+T_k).$$

由此得出

$$\Gamma = (I - B_k)(I+T_k)^{-1} = (I - B_k)\Gamma_k,$$

从而有

$$\Gamma_k - \Gamma = B_k \Gamma_k = B_k(\Gamma_k - \Gamma) + B_k \Gamma.$$

因此

$$||\Gamma_k - \Gamma|| \le ||B_k|| \, ||\Gamma_k - \Gamma|| + ||B_k|| \, ||\Gamma||. \tag{3.7.31}$$

在 (ii) 中已经证明，当 $k \ge k_0$ 时有 $||B_k|| < 1$. 因而当 $k \ge k_0$ 时有

$$||\Gamma_k - \Gamma|| \le \frac{||B_k||}{1 - ||B_k||}||\Gamma||.$$

再利用 (3.7.26) 得出 (3.7.30). 证完.

如果 $G = A^{-1}$ 是 $H \to H_A$ 的紧算子，而 K 是 $H_A \to H$ 的线性有界算子，那么 $T = GK$ 就是 H_A 上的紧算子. 因此，由定理 3.7.3 可以得出下列伽辽金方法近似解的收敛定理.

定理 3.7.4 设 A 是 D_A 上的正定算子, $G = A^{-1}$ 是 $H \to H_A$ 的紧算子， K 是 $H_A \to H$ 的线性有界算子， $L = A + K$. 如果齐次方程 (3.7.16) 只有零解，那么定理 3.7.3 中的结论 (i),(ii),(iii) 均成立.

定理 3.7.4 比定理 3.7.3 的应用范围狭窄一些，但定理 3.7.4 有时用起来更方便一些 (参阅下节).

由定理 3.7.3 的证明知道：如果 T 是 Hilbert 空间 H 中的线性紧算子，且齐次方程

$$u + Tu = 0$$

在 H 中只有零解，则算子方程

$$u + Tu = f, \quad f \in H$$

有唯一解 $u \in H$, 且可用 Galerkin 方法求其近似解.

例如，当

$$\int_0^1 \int_0^1 |K(x,y)^2 dxdy < 1 \tag{3.7.32}$$

时，由等式

$$(Tu)(x) = \int_0^1 K(x,y)u(y)dy \tag{3.7.33}$$

定义的算子 T 是 $L^2((0,1))$ 上的线性紧算子 (参阅文献 [17] 第十章 §2 例 2). 根据 Schwarz 不等式，由 (3.7.33) 得

$$|Tu)(x)|^2 \leq \int_0^1 |K(x,y)|^2 dy \int_0^1 |u(y)|^2 dy. \tag{3.7.34}$$

齐次方程

$$u + Tu = 0 \tag{3.7.35}$$

的解 $u(x)$ 满足

$$|u(x)|^2 = |(Tu)(x)|^2.$$

因此，由 (3.7.34) 有

$$\begin{aligned} \int_0^1 |u(x)|^2 dx &= \int_0^1 |(Tu)(x)|^2 dx \\ &\leq \int_0^1 \int_0^1 |K(x,y)|^2 dxdy \int_0^1 |u(y)|^2 dy \\ &= \int_0^1 \int_0^1 |K(x,y)|^2 dy \int_0^1 |u(x)|^2 dx. \end{aligned}$$

根据条件 (3.7.32), 由上式得出

$$\int_0^1 |u(x)|^2 dx = 0.$$

由此知道齐次方程 (3.7.35) 只有零解. 从而方程

$$u + Tu = f, \quad f \in L^2((0,1))$$

有唯一的解 $u \in L^2((0,1))$, 且可用 Galerkin 方法求其近似解. 这样一来, 我们得出结论: 在条件 (3.7.32) 下, 积分方程

$$u(x) + \int_0^1 K(x,y)u(y)dy = f(x)$$

对任意 $f \in L^2((0,1))$ 由唯一解 $u \in L^2((0,1))$, 且可用 Galerkin 方法求其近似解.

3.8 二阶线性椭圆方程的 Dirichlet 问题

设 L 为二阶线性一致椭圆算子, 即

$$Lu = -\sum_{i,j=1}^{n} D_i[a^{ij}(x)D_j u] + \sum_{i=1}^{n} b^i(x)D_i u + c(x)u, \tag{3.8.1}$$

其中系数满足条件

$$\begin{cases} a^{ij} = a^{ji},\ D_i a^{ij}(x) \in L^\infty(\Omega) \quad (i,j = 1,2,\cdots,n), \\ b^i(x) \in L^\infty(\Omega) \quad (i,j = 1,2,\cdots,n), c(x) \in L^\infty(\Omega), \end{cases} \tag{3.8.2}$$

及条件

$$\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \alpha|\xi|^2 (\alpha > 0), \quad \forall x \in \overline{\Omega}, \xi \in R^n, \tag{3.8.3}$$

$$c(x) \geq 0. \tag{3.8.4}$$

本节讨论一般二阶线性椭圆方程的 Dirichlet 问题

$$\begin{cases} Lu = f(x), & \text{在 } \Omega \text{ 中}, \\ u = 0, & \text{在 } \partial\Omega \text{ 上}. \end{cases} \tag{3.8.5}$$

取 $H = L^2(\Omega).D_A = C_0^2(\Omega)$ 是 H 的线性稠密子空间. 由等式

$$Au = -\sum_{i,j=1}^{n} D_i[a^{ij}(x)D_j u] + c(x)u \tag{3.8.6}$$

定义了 D_A 上的正定算子 A. 在 D_A 中引进新的内积及范数

$$[u,v] = \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(x)D_i u D_j v dx + \int_\Omega c(x)uv dx, \tag{3.8.7}$$

$$||u||_A = [u,u]^{\frac{1}{2}}. \tag{3.8.8}$$

在 3.4 节中已经证明，范数 $||u||_A$ 与范数 $||Du||_2$ 是等价的，即存在常数 $C_1 > \sqrt{\alpha} > 0$ 使得

$$\sqrt{\alpha}||Du||_2 \le ||u||_A \le C_1||Du||_2, \tag{3.8.9}$$

因而 $D_A = C_0^2(\Omega)$ 关于范数 $||\cdot||_A$ 完备化得到的空间是

$$H_A = W_0^{1,2}(\Omega).$$

定义 如果 $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ 满足

$$\int_\Omega \left\{ \sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(x)D_i u D_j v + \sum_{i=1}^{n} b^i(x)D_i u + c(x)uv \right\} dx$$
$$= \int_\Omega f(x)v dx, \quad \forall v \in W_0^{1,2}(\Omega), \tag{3.8.10}$$

则称 u 为算子方程 $Lu = f$ 或边值问题 (3.8.5) 在 $W_0^{1,2}(\Omega)$ 中的 **弱解 (广义解)**.

引理 3.8.1 设由 (3.8.1) 定义的算子 L 的系数满足条件 (3.8.2)~(3.8.4) 及

$$|b(x)|^2 = \sum_{i=1}^{n} |b_i(x)|^2 \leq 2\alpha c(x), \tag{3.8.11}$$

则算子方程 $Lu = 0$ 在 $W_0^{1,2}(\Omega)$ 中只有零解.

证 设 $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ 是齐次方程 $Lu = 0$ 的解, 在 (3.8.10) 中取 $v = u$, 并利用条件 (3.8.2)~ (3.8.4) 及 (3.8.11) 得出

$$\begin{aligned} 0 &= \int_\Omega \left\{ \sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(x) D_i u D_j v + \sum_{i=1}^{n} b^i(x) u D_i u + c(x) uv \right\} dx \\ &\geq \int_\Omega \left\{ \alpha |Du|^2 - |b(x)|\,|u|\,|Du| + \frac{|b(x)|^2}{2\alpha} |u|^2 \right\} dx \\ &= \frac{\alpha}{2} \int_\Omega |Du|^2 dx + \int_\Omega \left(\sqrt{\frac{\alpha}{2}} |Du| - \frac{|b(x)|}{\sqrt{2\alpha}} |u| \right)^2 dx \\ &\geq \frac{\alpha}{2} \int_\Omega |Du|^2 dx \geq c \int_\Omega |u|^2 dx \quad (\text{常数} c > 0), \end{aligned}$$

由此知 $u = 0$ a.e. 在 Ω 中. 证完.

注 利用弱极大值原理, 去掉条件 (3.8.11) 后引理 (3.8.1) 仍然成立 (参阅文献 [12] 推论 8.2 或文献 [4] 第一章定理 4.2). 因此, 在下面的定理 3.8.2 中也可去掉条件 (3.8.11).

定理 3.8.2 设条件 (3.8.2)~(3.8.4) 及 (3.8.11) 成立, 则对任意 $f \in L^2(\Omega)$, Dirichlet 问题 (3.8.5) 在 $W_0^{1,2}(\Omega)$ 中有唯一的弱解 u; 且对取定的坐标函数列 $\{\varphi_k\}$, 当 k 适当大时, 可以用伽辽金方法求出唯一的近似解 $u_k = \sum\limits_{i=1}^{k} a_i \varphi_i$, 并有

$$\|u_k - u\|_{W_0^{1,2}(\Omega)} \to 0, \quad \text{当} k \to \infty.$$

证 对 $D_A = C_0^2(\Omega)$ 上的正定算子 A, 由定理 3.4.4(其中的条件 (3.3.2) 及 (3.3.3) 可以削弱为 (3.8.1) 及 (3.8.3) 而不需要改变其

证明) 知道：算子 $G=A^{-1}$ 是 $H\to H_A$ 的线性紧算子．由 (3.8.1) 及 (3.8.6), 令 $L=A+K$, 则

$$Ku=\sum_{i=1}^{n}b^i(x)D_iu. \tag{3.8.12}$$

显然 K 是 $H_A\to H$ 的线性算子．由条件 (3.8.2) 可设

$$|b(x)|^2=\sum_{i=1}^{n}|b^i(x)|^2\leq B^2,\quad B\text{为正常数}.$$

于是，由 (3.8.12) 有

$$|Ku|^2\leq|b(x)|^2|Du|^2\leq B^2|Du|^2.$$

从而由 (3.8.9) 得出

$$||Ku||^2_{L^2(\Omega)}\leq B^2||Du||^2_{L^2(\Omega)}\leq\frac{B^2}{\alpha}||u||^2_A.$$

因此 K 是 $H_A\to H$ 的线性有界算子．再由引理 3.8.1 知道，定理 3.7.4 的所有条件都是满足的．根据定理 3.7.4 就能得出本定理的全部结论．

第四章　有限元素法

对微分方程边值问题求近似解，应用古典变分方法 (里斯方法和伽辽金方法) 的关键在于选取满足边界条件的坐标函数列. 如果这样的坐标函数列已经选出来，那么，用里斯方法或伽辽金方法求近似解是方便的，而且一般说来，只需取不多的几项就能得出较好的近似解. 但是，只有当区域 (物体) 的形状极简单 (如圆形，矩形等) 时，满足边界条件的坐标函数列才可能具体选出来. 对于比较复杂的区域，选取满足边界条件的坐标函数列是相当困难的. 因此，里斯方法和伽辽金方法在应用上有很大的局限性.

有限元素法的思想最早出现在 Courant R. 的文章 [31] 中，作者把它叫做广义网格法. 到了 20 世纪 50 年代，由于电子计算机的出现，工程师们在飞机结构精密化中重新发现了这个方法，给研究以往无法处理的复杂结构问题提供了一个有效的数值分析方法. 接着，这个方法在造船工业和建筑工业中也得到了应用. 到现在，有限元素法不仅在流体力学、弹塑性理论、热传导、电磁学及许多工程技术部门得到了广泛应用，而且在数学理论上得到了很快发展，已经成为计算数学中一个重要的分支学科. 有限元素法不仅可以应用于任何形状的研究对象，而且可以直接求出物理、力学及工程技术中实际问题所需的数值解.

有限元素法的理论根据是定理 3.6.1.

4.1　一维有限元素法

首先，我们以常微分方程边值问题

$$\begin{cases} -u'' + u = x, \ x \in (0,1) \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases} \tag{4.1.1}$$

作为例子来说明有限元素法的基本思想.

我们知道，边值问题 (4.1.1) 的解是泛函

$$I(u)=\int_0^1\left[\frac{1}{2}(u')^2+\frac{1}{2}u^2-xu\right]dx \qquad (4.1.2)$$

在 $W_0^{1,2}((0,1))$ 中的极值函数.

$W_0^{1,2}((0,1))$ 是一个无限维的 Banach 空间，它的元素可以展开成 Fourier 级数

$$a_1\sin\pi x+a_2\sin 2\pi x+\cdots+a_k\sin k\pi x+\cdots$$

里斯方法是在 $W_0^{1,2}((0,1))$ 中取一个有限维子空间

$$S_k=\{a_1\sin\pi x+a_2\sin 2\pi x+\cdots+a_k\sin k\pi x|a_1,a_2,\cdots,a_k\in R\},$$

把泛函 (4.1.2) 在有限维空间 S_k 中的极值函数作为问题 (4.1.1) 的近似解.

有限元素法也是在 $W_0^{1,2}((0,1))$ 中选取有限维子空间 V_k, 而把泛函 (4.1.2) 在 V_k 中的极值函数作为边值问题 (4.1.1) 的近似解.

V_k 是这样选取的：用分点

$$x_0=0<x_1<x_2<\cdots<x_k<x_{k+1}=1.$$

将区间 $[0,1]$ 分为 $k+1$ 个小区间 $[x_i,x_{i+1}](i=0,1,2,\cdots,k)$, 这些分点 $x_0,x_1,x_2,\cdots,x_{k+1}$ 叫做 **结点** 或 **节点**, 每个小区间 $[x_i,x_{i+1}]$ 叫做 **元素** 或 **单元**, 也简称 **元**, 其长度记为 $h_i=x_{i+1}-x_i(0\le i\le k)$.

设近似解在结点 x_i 上的值为 $u_i(i=0,1,2,\cdots,k+1)$, 由边界条件知道 $u_0=u_{k+1}=0$. 有限元素法就是用分段线性函数 (在每一元素上进行线性插值) 作为解 $u(x)$ 的近似，也就是用 (x,u) 平面上连接 $(x_0,u_0),(x_1,u_1),(x_2,u_2),\cdots,(x_{k+1},u_{k+1})$ 的折线作为解所表示曲线 $u=u(x)$ 的近似.

我们知道，在元素 $[x_i,x_{i+1}]$ 上连接两个端点 $(x_i,u_i),(x_{i+1},u_{i+1})$ 的直线方程为

$$\frac{u-u_i}{u_{i+1}-u_i}=\frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i},\quad x\in[x_i,x_{i+1}].$$

因此，上述折线方程为

$$u=\frac{x_{i+1}-x}{h_i}u_i+\frac{x-x_i}{h_i}u_{i+1},\quad x\in[x_i,x_{i+1}]\ (i=0,1,\cdots,k).\tag{4.1.3}$$

此折线方程可改写成

$$u=u_1\varphi_1(x)+u_2\varphi_2(x)+\cdots+u_k\varphi_k(x),\tag{4.1.4}$$

其中 $\varphi_i(x)$ 由下式定义

$$\varphi_i(x)=\begin{cases}0, & 当x\le x_{i-1},\\ \dfrac{x-x_{i-1}}{h_{i-1}}, & 当x_{i-1}\le x\le x_i,\\ \dfrac{x_{i+1}-x}{h_i}, & 当x_i\le x\le x_{i+1},\\ 0, & 当x\ge x_{i+1},\end{cases}$$

称为 **线性插值基函数**.

有限元素法就是以所有形如 (4.1.4) 或 (4.1.3) 的函数组成的 k 维空间作为 V_k, 而在 V_k 中求泛函 (4.1.2) 的极值函数作为边值问题 (4.1.1) 的近似解.

由 (4.1.2) 得出

$$I(u)=\sum_{i=0}^{k}J_i,\tag{4.1.5}$$

其中

$$J_i=\int_{x_i}^{x_{i+1}}\left[\frac{1}{2}(u')^2+\frac{1}{2}u^2-xu\right]dx.$$

以 (4.1.3) 代入上式得出

$$\begin{aligned}J_i=&\int_{x_i}^{x_{i+1}}\frac{1}{2}\left(\frac{u_{i+1}-u_i}{h_i}\right)^2dx\\&+\int_{x_i}^{x_{i+1}}\frac{1}{2}\left(\frac{x_{i+1}-x}{h_i}u_i+\frac{x-x_i}{h_i}u_{i+1}\right)^2dx\end{aligned}$$

$$-\int_{x_i}^{x_{i+1}} x\left(\frac{x_{i+1}-x}{h_i}u_i+\frac{x-x_i}{h_i}u_{i+1}\right)dx$$

$$=\frac{1}{2}(a_{ii}^i u_i^2+2a_{i,i+1}^i u_{i+1}+a_{i+1,i+1}^i u_{i+1}^2)-b_i^i u_i-b_{i+1}^i u_{i+1},$$

其中

$$\begin{cases} a_{ii}^i=\dfrac{1}{h_i}+\displaystyle\int_{x_i}^{x_{i+1}}\left(\frac{x_{i+1}-x}{h_i}\right)^2 dx=\frac{1}{h_i}+\frac{h_i}{3}, \\ a_{i,i+1}^i=-\dfrac{1}{h_i}+\displaystyle\int_{x_i}^{x_{i+1}}\frac{(x_{i+1}-x)(x-x_i)}{h_i}dx=-\frac{1}{h_i}+\frac{h_i}{6}, \\ a_{i+1,i+1}^i=\dfrac{1}{h_i}+\displaystyle\int_{x_i}^{x_{i+1}}\left(\frac{x-x_i}{h_i}\right)^2 dx=\frac{1}{h_i}+\frac{h_i}{3}, \\ b_i^i=\displaystyle\int_{x_i}^{x_{i+1}}\frac{x(x_{i+1}-x)}{h_i}dx=\frac{x_{i+1}h_i}{2}-\frac{h_i^2}{3}, \\ b_{i+1}^i=\displaystyle\int_{x_i}^{x_{i+1}}\frac{x(x-x_i)}{h_i}dx=\frac{x_i h_i}{2}+\frac{h_i^2}{3}. \end{cases} \tag{4.1.6}$$

J_i 是关于 u_i 及 u_{i+1} 的二次函数，可以利用矩阵

$$U_i=\begin{bmatrix} u_i \\ u_{i+1} \end{bmatrix},\quad A_i=\begin{bmatrix} a_{ii}^i & a_{i,i+1}^i \\ a_{i,i+1}^i & a_{i+1,i+1}^i \end{bmatrix},\quad B_i=\begin{bmatrix} b_i^i \\ b_{i+1}^i \end{bmatrix} \tag{4.1.7}$$

把 J_i 表示成

$$J_i=\frac{1}{2}U_i^T A_i U_i-B_i^T U_i, \tag{4.1.8}$$

其中 A_i 称为 $[x_i,x_{i+1}]$ 上的 **元素刚度矩阵**. 再利用 $k+2$ 行的列矩阵

$$U=\begin{bmatrix} u_0 \\ u_1 \\ \vdots \\ u_{k+1} \end{bmatrix},\quad C_i=\begin{bmatrix} \vdots \\ B_i \\ \vdots \end{bmatrix}\doteq\begin{bmatrix} \vdots \\ b_i^i \\ b_{i+1}^i \\ \vdots \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{第}i+1\text{行} \\ \text{第}i+2\text{行} \end{matrix} \tag{4.1.9}$$

及 $k+2$ 阶矩阵

$$K_i = \begin{bmatrix} & \vdots & \\ \cdots & A_i & \cdots \\ & \vdots & \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} & \vdots & \vdots & \\ \cdots & a_{ii}^i & a_{i,i+1}^i & \cdots \\ \cdots & a_{i+1,i}^i & a_{i+1,i+1}^i & \cdots \\ & \vdots & \vdots & \\ & \text{第}i+1\text{列} & \text{第}i+2\text{列} & \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \text{第}i+1\text{行} \\ \text{第}i+2\text{行} \\ \\ \\ \end{matrix}, \tag{4.1.10}$$

其中 C_i 中除 b_i^i 及 b_{i+1}^i 外其余元素都是 0, K_i 中除 $a_{jk}^i(j,k=i,i+1)$4 个元素外其余元素都是 0, 由 (4.1.5) 及 (4.1.8) 得出

$$\begin{aligned} I(u) &= \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{k} U_i^T A_i U_i - \sum_{i=0}^{k} B_i^T U_i \\ &= \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{k} U^T K_i U - \sum_{i=0}^{k} C_i^T U \\ &= \frac{1}{2} U^T (\sum_{i=0}^{k} K_i) U - (\sum_{i=0}^{k} C_i)^T U. \end{aligned} \tag{4.1.11}$$

如果记

$$C = \sum_{i=0}^{k} C_i = \begin{bmatrix} b_0^0 \\ b_1^0 + b_1^1 \\ \vdots \\ b_i^{i+1} + b_i^i \\ \vdots \\ b_k^{k+1} + b_k^k \\ b_{k+1}^k \end{bmatrix} \quad \text{第}i+1\text{行} \tag{4.1.12}$$

及

$$
\begin{aligned}
K &= \sum_{i=0}^{k} K_i \\
&= \begin{bmatrix}
a_{00}^0 & a_{01}^0 & & & & & & \\
a_{01}^0 & a_{11}^0 + a_{11}^1 & a_{12}^1 & & & & & \\
& a_{12}^1 & a_{12}^1 + a_{12}^2 & a_{13}^2 & & & & \\
& & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\
& & & a_{i-1,i}^{i-1} & a_{ii}^{i-1} + a_{ii}^i & a_{i,i+1}^i & \cdots & (\text{第 } i+1 \text{ 行}) \\
& & & & \ddots & \ddots & \ddots & \\
& & & & & a_{k-1,k}^{k-1} & a_{kk}^{k-1} + a_{kk}^k & a_{k,k+1}^k \\
& & & & & & a_{k,k+1}^k & a_{k+1,k+1}^k
\end{bmatrix}
\end{aligned}
\tag{4.1.13}
$$

这个矩阵 K 称为解边值问题 (4.1.1) 的有限元素法的 **刚度矩阵**, 它是三对角形的对称矩阵. 于是 (4.1.11) 可以写成

$$I(u) = \frac{1}{2} U^T K U - C^T U, \tag{4.1.14}$$

它是关于 $u_0, u_1, \cdots, u_{k+1}$ 的二次函数. 由于边界条件 $u_0 = u(x_0) = u(0) = 0, u_{k+1} = u(x_{k+1}) = u(1) = 0$, 可以把 K 中第一行及第一列的元素及最后一行及最后一列的元素 $a_{00}^0, a_{01}^0, a_{k,k+1}^k, a_{k+1,k+1}^k$ 视为 0, 同时将 C 中的第一行及最后一行的元素 b_0^0 及 b_{k+1}^k 也视为 0. 选取 $u_1, u_2, \cdots, u_k$ 使 $I(u)$ 取最小值, 必须

$$\frac{\partial I(u)}{\partial u_i} = 0 \quad (i = 1, 2, \cdots, k).$$

以 (4.1.14) 代入上式得出

$$KU - C = 0, \quad \text{即} KU = C. \tag{4.1.15}$$

此矩阵方程即下面的含 k 个未知量 $u_1, u_2, \cdots, u_k$ 的线性方程组

$$\begin{cases} (a_{11}^0 + a_{11}^1)u_1 + a_{12}^1 u_2 = b_1^0 + b_1^1, \\ \quad \cdots\cdots\cdots \\ a_{i-1,i}^{i-1} u_{i-1} + (a_{ii}^{i-1} + a_{ii}^i) u_i + a_{i,i+1}^i u_{i+1} = b_i^{i-1} + b_i^i, \\ \quad \cdots\cdots\cdots \\ a_{k-1,k}^{k-1} u_{k-1} + (a_{kk}^{k-1} + a_{kk}^k) u_k = b_k^{k-1} + b_k^k. \end{cases} \tag{4.1.16}$$

此线性方程组的系数矩阵不仅是三对角对称矩阵，而且是正定的，在电子计算机上不难用追赶法解出 $u_1, u_2, \cdots, u_k$，他们就是常微分方程边值问题 (4.1.1) 的近似解 (4.1.3) 或 (4.1.4) 在结点 $x_1, x_2, \cdots, x_k$ 处的值.

例如，我们用 3 个分点 $x_1 = \frac{1}{4}$, $x_2 = \frac{1}{2}$, $x_3 = \frac{3}{4}$, 把区间 $[0,1]$ 均分为 4 个元素，每个元素的长度为 $h = h_i = \frac{1}{4}$, 则由 (4.1.6) 得出

$$a_{ii}^i = a_{i+1,i+1}^i = \frac{1}{4} + \frac{1}{12} = \frac{49}{12},$$

$$a_{i,i+1}^i = -4 + \frac{1}{24} = -\frac{95}{24},$$

$$b_i^{i-1} + b_i^i = \frac{x_{i+1} + x_{i-1}}{2} h = x_i h = \frac{1}{4} x_i.$$

因此，方程组 (4.1.16) 简化为

$$\begin{cases} \frac{49}{6} u_1 - \frac{95}{24} u_2 = \frac{1}{16} \\ -\frac{95}{24} u_1 + \frac{49}{6} u_2 - \frac{95}{24} u_3 = \frac{1}{8} \\ -\frac{95}{24} u_2 + \frac{49}{6} u_3 = \frac{3}{16} \end{cases}$$

或

$$\begin{cases} 196u_1 - 95u_2 \qquad\qquad = \dfrac{3}{2} \\ -95u_1 + 196u_2 - 95u_3 = 3 \\ \qquad\qquad -95u_2 + 196u_3 = \dfrac{9}{2} \end{cases}$$

解此线性方程组得出

$$\begin{cases} u_1 = \dfrac{140559}{392 \times 10183} = \dfrac{140559}{3991736} = 0.0352 \\ u_2 = \dfrac{579}{10183} = 0.0568 \\ u_3 = \dfrac{201657}{392 \times 10183} = \dfrac{201657}{3991736} = 0.0505. \end{cases}$$

此 u_1, u_2, u_3 分别是边值问题 (4.1.1) 的解 $u(x)$ 在 $x = \dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{2}, \dfrac{3}{4}$ 三点的近似值. 实际上，边值问题 (4.1.1) 的精确解为

$$u(x) = x - \frac{e^x - e^{-x}}{e - e^{-1}},$$

它在 $x = \dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{2}, \dfrac{3}{4}$ 三点上的值分别为 0.0353, 0.0566, 0.0509. 由此看出，虽然我们只把区间分成了 4 个元素，用有限元素法得出的近似解在结点处的值还是比较精确的.

应当指出，用有限元素法求解一维问题时，分成的元素的长度不必相等；因此，在工程技术问题中可以根据实际情况布置结点，使得既节省计算而又符合所要求的精度.

4.2 一维有限元素法近似解的误差估计

讨论二阶常微分方程两点边值问题

$$\begin{cases} Au \equiv -\dfrac{d}{dx}\left[p(x)\dfrac{du}{dx}\right] + q(x)u = f(x), x \in (a,b), \\ u(a) = 0, \\ u(b) = 0 \quad (\text{或} u'(b) = 0). \end{cases} \tag{4.2.1}$$

设

$$p(x) \in C^1[a,b], q(x), f(x) \in C^0[a,b], p_1 \geq p(x) \geq p_0 > 0, q_1 \geq q(x) \geq 0.$$

取

$$H = L^2(a,b),$$

$$D_A = C_0^2(a,b) \quad (\text{或} D_A = \{u \in C^2(a,b) \cap C^1[a,b] | u(a) = 0\}).$$

在 D_A 中定义内积

$$[u,v] = \int_a^b [p(x)u'v' + q(x)uv]dx, \tag{4.2.2}$$

则 D_A 关于范数

$$||u||_A = [u,u]^{\frac{1}{2}} = \left\{\int_a^b [p(x)(u')^2 + q(x)u^2]dx\right\}^{\frac{1}{2}} \tag{4.2.3}$$

完备化得到 Hilbert 空间

$$H_A = W_0^{1,2}(a,b)(\text{或} H_A = \{u \in W^{1,2}(a,b) | u(a) = 0\}).$$

仿照定理 3.1.2 中得出 (3.1.16) 的证明可以推出：对于泛函

$$\begin{aligned} I(u) &= \frac{1}{2}[u,u] - (f,u) \\ &= \frac{1}{2}\int_a^b [p(x)(u')^2 + q(x)u^2]dx - \int_a^b f(x)udx, \end{aligned} \tag{4.2.4}$$

变分问题

$$I(u) = \min_{v \in H_A} I(v) \tag{4.2.5}$$

的解 $u \in H_A$ 满足

$$[u,v] = (f,v), \quad \forall v \in H_A, \tag{4.2.6}$$

即

$$\int_a^b [p(x)u'v' + q(x)uv]dx = \int_a^b f(x)vdx, \quad \forall v \in H_A.$$

也就是说 u 是边值问题 (4.2.1) 的解 (弱解).

有限元素法解 $u_k \in V_k$ 是对所有线性插值函数 (4.1.3) 所成的 k 维空间 V_k, 变分问题

$$I(u_k) = \min_{v \in V_k} I(v) \tag{4.2.7}$$

的解. 由定理 3.6.1 得出

$$||u_k - u||_A \le ||v - u||_A, \quad \forall v \in V_k. \tag{4.2.8}$$

对解 $u(x)$ 记 $u_i = u(x_i)$, 利用 (4.1.3) 定义的分段线性插值函数

$$\overline{u}(x) = \frac{x_{i+1} - x}{h_i} u_i + \frac{x - x_i}{h_i} u_{i+1}, x \in [x_i, x_{i+1}] (i = 0, 1, 2, \cdots, k) \tag{4.2.9}$$

有 $\overline{u} \in V_k$. 因此, 由 (4.2.8) 得出

$$||u_k - u||_A \le ||\overline{u} - u||_A. \tag{4.2.10}$$

将恒等式

$$\int_{x_i}^x [(t - x_i)u'(t)]' dt = \int_{x_i}^x u'(t)dt + \int_{x_i}^x (t - x_i)u''(t)dt$$

积分后得出

$$(x - x_i)u'(x) = u(x) - u(x_i) + \int_{x_i}^x (t - x_i)u''(t)dt. \tag{4.2.11}$$

在此式中将 x_i 换成 x_{i+1} 又得

$$(x - x_{i+1})u'(x) = u(x) - u(x_{i+1}) + \int_{x_{i+1}}^x (t - x_{i+1})u''(t)dt. \tag{4.2.12}$$

由 (4.2.11) 减去 (4.2.12) 得出

$$(x_{i+1}-x_i)u'(x)$$
$$=u(x_{i+1})-u(x_i)+\int_{x_i}^{x}(t-x_i)u''(t)dt+\int_{x}^{x_{i+1}}(t-x_{i+1})u''(t)dt.$$

根据 (4.2.9), 由上式得出：当 $x\in[x_i,x_{i+1}]$ 时有

$$u'(x)-\overline{u}'(x)=u'(x)-\frac{u_{i+1}-u_i}{h_i}$$
$$=\frac{1}{h_i}\left\{\int_{x_i}^{x}(t-x_i)u''(t)dt+\int_{x}^{x_{i+1}}(t-x_{i+1})u''(t)dt\right\}.$$

因此，利用 Schwarz 不等式得出：当 $x\in[x_i,x_{i+1}]$ 时有

$$|u'(x)-\overline{u}'(x)|^2$$
$$\leq\frac{1}{h_i^2}\left\{\left(\int_{x_i}^{x}(t-x_i)^2dt\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{x_i}^{x}|u''(t)|^2dt\right)^{\frac{1}{2}}\right.$$
$$\left.+\left(\int_{x}^{x_{i+1}}(t-x_{i+1})^2dt\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{x}^{x_{i+1}}|u''(t)|^2dt\right)^{\frac{1}{2}}\right\}^2$$
$$\leq\frac{1}{h_i^2}\left\{\int_{x_i}^{x}(t-x_i)^2dt)+(\int_{x}^{x_{i+1}}(t-x_{i+1})^2dt\right\}$$
$$\cdot\left\{\int_{x_i}^{x}|u''(t)|^2dt+\int_{x}^{x_{i+1}}|u''(t)|^2dt\right\}$$
$$=\frac{1}{h_i^2}\left\{\frac{(x-x_i)^3}{3}-\frac{(x-x_{i+1})^3}{3}\right\}\int_{x_i}^{x_{i+1}}|u''(t)|^2dt.$$

由此得出

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}}|u'(x)-\overline{u}'(x)|^2$$
$$\leq\frac{1}{3h_i^2}\int_{x_i}^{x_{i+1}}|u''(t)|^2dt\int_{x_i}^{x_{i+1}}\{(x-x_i)^3-(x-x_{i+1})^3\}dx$$

$$= \frac{h_i^2}{6} \int_{x_i}^{x_{i+1}} |u''(x)|^2 dx. \tag{4.2.13}$$

记 $h = \max\limits_{0 \le i \le h} h_i$, 则由上式得出

$$\int_a^b |u'(x) - \overline{u}'(x)|^2 \le \frac{h^2}{6} \int_a^b |u''(x)|^2 dx. \tag{4.2.14}$$

引理 4.2.1 对于函数集合

$$V = \left\{ u \in C^0[a,b] \middle| \begin{array}{l} u(a) = 0, \\ u\text{在}[x_i, x_{i+1}]\text{上有连续导数}(i = 0, 1, 2, \cdots, k) \end{array} \right\}$$

有 Friedrichs 不等式

$$\int_a^b |u(x)|^2 dx \le (b-a)^2 \int_a^b |u'(x)|^2 dx, \quad \forall\, u \in V. \tag{4.2.15}$$

证 设 $u \in V$，对任一区间 $[x_i, x_{i+1}](0 \le i \le k)$, 当 $x \in [x_i, x_{i+1}]$ 时有

$$\begin{aligned} u(x) &= u(x) - u(x_i) + u(x_i) - u(x_{i-1}) + \cdots + u(x_1) - u(a) \\ &= \int_{x_i}^{x} u'(t)dt + \int_{x_{i-1}}^{x_i} u'(t)dt + \cdots + \int_a^{x_1} u'(t)dt \\ &= \int_a^x u'(t)dt. \end{aligned}$$

利用 Schwarz 不等式，由上式得出

$$|u(x)|^2 \le \left(\int_a^x |u'(t)|dt \right)^2 \le \int_a^b |u'(x)|^2 dt \le (b-a) \int_a^b |u'(x)|^2 dt.$$

对这个不等式两端在区间 $[a,b]$ 上积分就得出不等式 (4.2.15). 证完.

现在来证明下面的关于有限元素法解的误差估计定理.

定理 4.2.2 设常微分方程两点边值问题 (4.2.1) 的弱解 $u(x)$ 有二阶导数 (可以是弱导数, 参阅 5.3 节的定义 1) $u''(x) \in L^2(a,b)$,

则 (4.2.1) 的有限元素法解 $u_k(x)$ 有下列误差估计

$$\|u_k' - u'\|_2 \le C\|u''\|_2 h, \tag{4.2.16}$$

$$\|u_k - u\|_2 \le C(b-a)\|u''\|_2 h, \tag{4.2.17}$$

其中 $h = \max\limits_{0\le i\le k} h_i$, $C = \sqrt{\dfrac{p_1 + q_1(b-a)^2}{6p_0}}$.

证 由 (4.2.3) 及 (4.2.15) 得出

$$\|u\|_A^2 \le p_1\|u\|_2^2 + q_1\|u\|_2^2 \le [p_1 + q_1(b-a)^2]\|u'\|_2^2, \quad u \in H_A, \tag{4.2.18}$$

$$\|u\|_A \ge \sqrt{p_0}\|u'\|_2 \ge \frac{\sqrt{p_0}}{b-a}\|u\|_2, \quad u \in H_A. \tag{4.2.19}$$

由 (4.2.19),(4.2.10),(4.2.18) 及 (4.2.14) 得出

$$\begin{aligned}\|u_k' - u'\|_2 &\le \frac{1}{\sqrt{p_0}}\|u_k - u\|_A \le \frac{1}{\sqrt{p_0}}\|\overline{u} - u\|_A \\ &\le \sqrt{\frac{p_1 + q_1(b-a)^2}{p_0}}\|\bar{u}' - u'\|_2 \le C\|u''\|_2 h.\end{aligned}$$

此式即 (4.2.16). 再由 (4.2.15) 及上式得出 (4.2.17). 证完

定理 4.2.2 说明，有限元素法近似解 $u_k(x)$ 及其导数 $u_k'(x)$ 相对于精确解 $u(x)$ 及其导数 $u'(x)$ 的误差由 $h = \max\limits_{0\le i\le k} h_i$ 确定；当 h 越小时误差越小，当 $h \to 0$ 时，有限元素法近似解 $u_k(x)$ 及其导数 $u_k'(x)$ 在 $L^2(a,b)$ 中分别收敛于精确解 $u(x)$ 及其导数 $u'(x)$.

4.3 二维有限元素法

设 Ω 是 R^2 中的一个有界区域，$u \in W^{1,2}(\Omega)$. 如果 $(u-\psi) \in W_0^{1,2}(\Omega)$, 且 u 满足

$$\int_\Omega \left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial \varphi}{\partial y} - f\varphi\right) dx = 0, \quad \forall \varphi \in C_0^1(\Omega), \tag{4.3.1}$$

则称 u 为 Poisson 方程 Dirichlet 问题

$$\begin{cases} -\triangle u=-\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=f(x,y), & \text{在 } \Omega \text{ 中}, \ f\in L^2(\Omega) \\ u=\psi, & \text{在 } \partial\,\Omega \text{上}, \ \psi\in W^{1,2}(\Omega) \end{cases} \tag{4.3.2}$$

在 $W^{1,2}(\Omega)$ 中的广义解. 仿定理 1.3.1 可以证明, 如果 u 是 Dirichlet 问题 (4.3.2) 的 (广义) 解, 则 u 是泛函

$$I(u)=\int_\Omega\left\{\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]-fu\right\}dxdy \tag{4.3.3}$$

在函数集合 $\{u\in W^{1,2}(\Omega)|(u-\psi)\in W_0^{1,2}(\Omega)\}$ 中的极值函数.

把区域 Ω 用假想的线段剖分为三角形网格, 要求每个三角形的顶点不能同时又是另一个三角形的边的内点, 每一个三角形至少有一个顶点是区域 Ω 的内点, 三角形网格所成的多边形的顶点都在 $\partial\Omega$ 上. 把此多边形记为 Ω'. 所有三角形的顶点称为 **结点**. 记含于区域 Ω 内部的结点为 ①, ②, $\cdots$, ⓝ, 记位于边界 $\partial\Omega$ 上的结点为 $\boxed{n+1}$, $\boxed{n+2}$, $\cdots$, $\boxed{n+s}$. 每一个三角形叫做一个**元素**, 把所有三角形元素编号为 Δ_1, Δ_2, $\cdots$, Δ_m. 设结点 ⓘ (或 $\boxed{i}$) 的坐标为 (x_i,y_i), Dirichlet 问题 (4.3.2) 的近似解在该结点的值为 $u_i(i=1,2,\cdots,n+s)$. 边界结点上的值 $u_{n+1},\cdots,u_{n+s}$ 由边界条件确定, 其值是已知的. 视内部结点的值 $u_1,\cdots,u_n$ 为未知量.

如果元素 Δ_e 的三个顶点按反时针旋转顺序是 ⓘ, ⓙ, ⓜ, 在 Δ_e 上选取线性插值函数

$$u_e(x,y)=\alpha_e+\beta_e x+\gamma_e y \tag{4.3.4}$$

使得

$$\begin{cases} u_i=u_e(x_i,y_i)=\alpha_e+\beta_e x_i+\gamma_e y_i, \\ u_j=u_e(x_j,y_j)=\alpha_e+\beta_e x_j+\gamma_e y_j, \\ u_m=u_e(x_m,y_m)=\alpha_e+\beta_e x_m+\gamma_e y_m. \end{cases} \tag{4.3.5}$$

这是关于 $\alpha_e, \beta_e, \gamma_e$ 的线性方程组，其系数行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_m & y_m \end{vmatrix} = 2\triangle_e \neq 0, \qquad (4.3.6)$$

其中 $\triangle_e$ 表示元素 $\triangle_e$ 的面积．故方程组 (4.3.5) 有唯一的解

$$\alpha_e = \frac{A_e}{2\triangle_e}, \quad \beta_e = \frac{B_e}{2\triangle_e}, \quad \gamma_e = \frac{C_e}{2\triangle_e}, \qquad (4.3.7)$$

其中

$$A_e = \begin{vmatrix} u_i & x_i & y_i \\ u_j & x_j & y_j \\ u_m & x_m & y_m \end{vmatrix} = a_i u_i + a_j u_j + a_m u_m,$$

$$B_e = \begin{vmatrix} 1 & u_i & y_i \\ 1 & u_j & y_j \\ 1 & u_m & y_m \end{vmatrix} = b_i u_i + b_j u_j + b_m u_m, \qquad (4.3.8)$$

$$C_e = \begin{vmatrix} 1 & x_i & u_i \\ 1 & x_j & u_j \\ 1 & x_m & u_m \end{vmatrix} = c_i u_i + c_j u_j + c_m u_m,$$

式中的 $a_i, a_j, a_m, b_1, b_j, b_m, c_i, c_j, c_m$ 按下式计算

$$\begin{aligned} &a_i = \begin{vmatrix} x_j & y_j \\ x_m & y_m \end{vmatrix}, \quad a_j = \begin{vmatrix} x_m & y_m \\ x_i & y_i \end{vmatrix}, \quad a_m = \begin{vmatrix} x_i & y_i \\ x_j & y_j \end{vmatrix}, \\ &b_i = y_j - y_m, \qquad b_j = y_m - y_i, \qquad b_m = y_i - y_j, \\ &c_i = x_m - x_j, \qquad c_j = x_i - x_m, \qquad c_m = x_j - x_i. \end{aligned} \qquad (4.3.9)$$

将 (4.3.7) 及 (4.3.8) 代入 (4.3.4) 后，再利用等式 (4.3.9) 得出

$$u_e(x, y) = \xi_i u_i + \xi_j u_j + \xi_m u_m, \quad (x, y) \in \triangle_e, \qquad (4.3.10)$$

其中

$$\xi_i = \xi_i(x,y) = \frac{a_i + b_i x + c_i y}{2\triangle_e} = \frac{1}{2\triangle_e}\begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_m & y_m \end{vmatrix}. \tag{4.3.11}$$

如果采用记号

$$L_{jm} = L_{jm}(x,y) = \begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_m & y_m \end{vmatrix} = 2\triangle_e^i, \tag{4.3.12}$$

其中 $\triangle_e^i$ 表示动点 $P(x,y)$ 与两顶点 ⓙ, ⓜ 所成三角形的面积. 而 $L_{jm}(x,y)=0$ 表示连接两点 ⓙ 与 ⓜ 的直线方程，且

$$(L_{jm})_i = L_{jm}(x_i,y_i) = 2\,\triangle_e\,.$$

因此得出

$$\begin{cases} \xi_i = \xi_i(x,y) = \dfrac{\triangle_e^i}{\triangle_e} = \dfrac{L_{jm}}{(L_{jm})_i}, \\[2ex] \xi_j = \xi_j(x,y) = \dfrac{\triangle_e^j}{\triangle_e} = \dfrac{L_{mi}}{(L_{mi})_j}, \\[2ex] \xi_m = \xi_m(x,y) = \dfrac{\triangle_e^m}{\triangle_e} = \dfrac{L_{ij}}{(L_{ij})_m}. \end{cases}$$

通常称 $\xi=(\xi_i,\xi_j,\xi_m)$ 为点 $P(x,y)$ 关于元素 $\triangle_e$ 的 **面积坐标** 或 **重心坐标**, 它满足

$$\begin{aligned} &\xi_i(x,y)+\xi_j(x,y)+\xi_m(x,y)=1, \\ &\xi_i(x_i,y_i)=1, \quad \xi_i(x_j,y_j)=\xi_i(x_m,y_m)=0, \\ &\xi_j(x_j,y_j)=1, \quad \xi_j(x_m,y_m)=\xi_j(x_i,y_i)=0, \\ &\xi_m(x_m,y_m)=1, \quad \xi_m(x_i,y_i)=\xi_m(x_j,y_j)=0. \end{aligned}$$

显然，元素 $\triangle_e$ 的顶点的重心坐标分别是 $(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)$, 而 $\triangle_e$ 的重心的重心坐标是 $\left(\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{3}\right)$.

在对区域 Ω 进行三角形剖分所得出的多边形 Ω' 中, 在每一元素 $\triangle_e$ 上按公式 (4.3.10) 定义线性插值函数 $u_e(x,y)(e=1,2,\cdots,m)$, 即

$$u(x,y)=u_e(x,y),\ 当\ (x,y)\in\Delta_e\ (e=1,2,\cdots,m). \tag{4.3.13}$$

这个 Ω' 上分块有连续导数的连续函数也可以表示成

$$u(x;y)=\sum_{i=1}^{n+s}B_i(x,y)u_i,\quad (x,y)\in\Omega', \tag{4.3.13$'$}$$

其中 $B_i(x,y)$ 是这样定义的: 如果结点 ⓘ 的相邻结点为 ⓙ, ⓛ, ⓜ, ⓟ, ⓠ, 而以 ⓘ 为顶点的元素是 $\triangle_1$, $\triangle_2$, $\triangle_3$, $\triangle_4$, $\triangle_5$, 则

$$B_i(x,y)=\begin{cases}\xi_i^e=\dfrac{\triangle_e^i}{\triangle_e}, & 当(x,y)\in\triangle_e(e=1,2,3,4,5),\\[2ex] 0, & 当(x,y)\notin\bigcup\limits_{i=1}^{5}\triangle_e.\end{cases}$$

即 $B_i(x,y)$ 表示以 ⓘ 为顶点, 以五边形 ⓙ, ⓛ, ⓜ, ⓟ, ⓠ 为底, 高为 1 的多面锥的侧面, 它在五边形外为零.

如果把元素剖分得充分小, 可以把区域 Ω 近似地看成多边形区域 Ω'. 当边界结点充分密时, 又可把边界函数 ψ 在多边形 Ω' 的每段直线边上近似地看成线性函数. 于是对 (4.3.13) 定义的插值函数 $u(x,y)$, 近似地在 $\partial\Omega'$ 上有 $u=\psi$. 有限元素法就是以多边形 Ω' 代替 Ω, 以形如 (4.3.13) 的函数集合 P_n 代替集合 $\{u\in W^{1,2}(\Omega)|u-\psi\in W_0^{1,2}(\Omega)\}$, 而在 P_n 上求泛函 (4.3.3) 的极值函数, 把这样得到的形如 (4.3.13) 的极值函数作为 Dirichlet 问题 (4.3.2) 的近似解.

将插值函数 (4.3.13), 即 (4.3.13)$'$ 代入泛函 (4.3.3), 利用 (4.3.4) 及 (4.3.7) 得出

$$I(u)=\sum_{e=1}^{m}I_e, \tag{4.3.14}$$

$$
\begin{aligned}
I_e &= \frac{1}{2}\iint\limits_{\triangle_e}\left[\left(\frac{\partial u_e}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u_e}{\partial y}\right)^2\right]dxdy-\iint_{\triangle_e} f u_e dxdy \\
&= \frac{1}{2}\iint\limits_{\triangle_e}(\beta_e^2+\gamma_e^2)dxdy-\iint_{\triangle_e} f(\xi_i u_i+\xi_j u_j+\xi_m u_m)dxdy \\
&= \frac{1}{8\triangle_e}(B_e^2+C_e^2)-(f_i^e u_i+f_j^e u_j+f_m^e u_m) \\
&= \frac{1}{8\triangle_e}\{(b_e^T U_e)^T(b_e^T U_e)+(c_e^T U_e)^T(c_e^T U_e)\}-f_e^T U_e,
\end{aligned}
\tag{4.3.15}
$$

其中 f_e 称为**元素 $\triangle_e$ 的荷载矩阵**, 且有

$$
f_i^e=\iint\limits_{\triangle_e} f\xi_i dxdy,\quad f_j^e=\iint\limits_{\triangle_e} f\xi_j dxdy,\quad f_m^e=\iint\limits_{\triangle_e} f\xi_m dxdy,
\tag{4.3.16}
$$

$$
b_e=\begin{bmatrix} b_i \\ b_j \\ b_m \end{bmatrix},\quad c_e=\begin{bmatrix} c_i \\ c_j \\ c_m \end{bmatrix},\quad U_e=\begin{bmatrix} u_i \\ u_j \\ u_m \end{bmatrix},\quad f_e=\begin{bmatrix} f_i^e \\ f_j^e \\ f_m^e \end{bmatrix},
\tag{4.3.17}
$$

由 (4.3.15) 得出

$$
I_e=\frac{1}{2}U_e^T k_e U_e-f_e^T U_e,
\tag{4.3.18}
$$

其中

$$
\begin{aligned}
k_e &= \frac{1}{4\triangle_e}(b_e b_e^T+c_e c_e^T) \\
&= \frac{1}{4\triangle_e}\begin{bmatrix} b_i^2+c_i^2 & b_i b_j+c_i c_j & b_i b_m+c_i c_m \\ b_i b_j+c_i c_j & b_j^2+c_j^2 & b_j b_m+c_j c_m \\ b_i b_m+c_i c_m & b_j b_m+c_j c_m & b_m^2+c_m^2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} k_{ii}^e & k_{ij}^e & k_{im}^e \\ k_{ji}^e & k_{jj}^e & k_{jm}^e \\ k_{mi}^e & k_{mj}^e & k_{mm}^e \end{bmatrix}
\end{aligned}
\tag{4.3.19}
$$

称为 **元素 $\triangle_e$ 的刚度矩阵**.

利用 $n+s$ 行的列矩阵

$$\begin{aligned} U &= [u_1, u_2, \cdots, u_n, u_{n+1}, \cdots, u_{n+s}]^T, \\ F_e &= [\cdots f_i^e \cdots f_j^e \cdots f_m^e \cdots]^T, \end{aligned} \tag{4.3.20}$$

其中 F_e 中除第 i, j, m 行的元素外其余元素都是 0, 并把元素 $\triangle_e$ 的刚度矩阵增广为 $n+s$ 阶矩阵

$$K_e = \begin{pmatrix} & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\ \cdots & k_{ii}^e & \cdots & k_{ij}^e & \cdots & k_{im}^e & \cdots \\ & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\ \cdots & k_{ji}^e & \cdots & k_{jj}^e & \cdots & k_{jm}^e & \cdots \\ & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\ \cdots & k_{mi}^e & \cdots & k_{mj}^e & \cdots & k_{mm}^e & \cdots \\ & \vdots & & \vdots & & \vdots & \end{pmatrix} \tag{4.3.21}$$

其中除 l 行 s 列的 $k_{ls}^e (l, s = i, j, m)$ 9 个元素外其余元素都是 0, 于是 (4.3.18) 可以改写成

$$I_e = \frac{1}{2} U^T K_e U - F_e^T U. \tag{4.3.22}$$

将此式代入 (4.3.14) 得出

$$I(u) = \frac{1}{2} U^T K U - F^T U, \tag{4.3.23}$$

其中

$$K = \sum_{e=1}^{m} K_e, \quad F = \sum_{e=1}^{m} F_e. \tag{4.3.24}$$

$n+s$ 阶矩阵 K 称为问题 (4.3.2) 的 **总刚度矩阵**, 而 $n+s$ 行的列矩阵 F 称为问题 (4.3.2) 的 **总荷载矩阵**.

由于在边界结点上的值 $u_{n+1}, u_{n+2}, \cdots, u_{n+s}$ 为已知, 将矩阵 U, F 及 K 分块为

$$U = \begin{bmatrix} \bar{U} \\ \widetilde{U} \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} \bar{F} \\ \widetilde{F} \end{bmatrix}, \quad K = \begin{bmatrix} \bar{K} & \hat{K} \\ \hat{K}^T & \widetilde{K} \end{bmatrix}, \tag{4.3.25}$$

其中

$$\bar{U}=\begin{bmatrix}u_1\\u_2\\\vdots\\u_n\end{bmatrix},\quad \bar{F}=\begin{bmatrix}f_1\\f_2\\\vdots\\f_n\end{bmatrix},\quad \bar{K}=\begin{bmatrix}k_{11}&k_{12}&\cdots&k_{1m}\\k_{21}&k_{22}&\cdots&k_{2m}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\k_{m1}&k_{m2}&\cdots&k_{mm}\end{bmatrix}\tag{4.3.26}$$

为 n 行的列矩阵及 n 阶方阵.

将矩阵 U,F,K 的分块形式 (4.3.25) 代入 (4.3.23), 根据分块矩阵乘法展开得出

$$I(u)=\frac{1}{2}\bar{U}^T\bar{K}\bar{U}+\bar{U}^T\hat{K}\widetilde{U}+\frac{1}{2}\widetilde{U}^T\widetilde{K}\widetilde{U}-\bar{F}^T\bar{U}-\widetilde{F}^T\widetilde{U}.\tag{4.3.27}$$

此式为关于未知量 $u_1,u_2,\cdots,u_n$ 的二次多项式, 求泛函 $I(u)$ 在 P_n 中的极值函数 (4.3.13) 就是选取 $u_1,u_2,\cdots,u_n$ 使 $I(u)$ 取极小值, 因而必须

$$\frac{\partial I(u)}{\partial u_1}=0,\quad \frac{\partial I(u)}{\partial u_2}=0,\cdots,\frac{\partial I(u)}{\partial u_n}=0,$$

即

$$\frac{\partial I(u)}{\partial \bar{U}}=0.\tag{4.3.28}$$

以 (4.3.27) 代入上式得出

$$\bar{K}\bar{U}+\hat{K}\widetilde{U}-\overline{F}=0.\tag{4.3.29}$$

此为关于 $u_1,u_2,\cdots,u_n$ 的线性方程组, 它是由方程组

$$KU-F=0\tag{4.3.30}$$

去掉最后 s 个方程得到的. 因此, 在用计算机计算实际问题时, 只需求出方程组 (4.3.30) 中的前 n 个方程, 再将已知边界值 $\widetilde{U}$ 代入, 就得出方程组 (4.3.29). 解方程组 (4.3.29) 得出近似解在内部结点上的值 $u_1,u_2,\cdots,u_n$, 从而得出有限元素法的近似解 (4.3.13).

为了得出问题 (4.3.2) 的有限元素法近似解,我们还需对 (4.3.16) 中的积分进行计算. 由 (4.3.11) 及 (4.3.9) 得出

$$x = x_i\xi_i + x_j\xi_j + x_m\xi_m, \quad y = y_i\xi_i + y_j\xi_j + y_m\xi_m. \tag{4.3.31}$$

因为 $\xi_i + \xi_j + \xi_m = 1$, 以 $\xi_m = 1 - \xi_i - \xi_j$ 代入上式得出

$$\begin{cases} x = (x_i - x_m)\xi_i + (x_j - x_m)\xi_j + x_m, \\ y = (y_i - y_m)\xi_i + (y_j - y_m)\xi_j + y_m. \end{cases} \tag{4.3.32}$$

对 (4.3.16) 中的第一个积分作变数代换 (4.3.32) 得出

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2\Delta_e}\iint\limits_{\triangle_e} f(x,y)\xi_i dxdy \\ &= \frac{1}{2\Delta_e}\iint\limits_{\triangle_e'} f(x_i\xi_i + x_j\xi_j + x_m\xi_m, y_i\xi_i + y_j\xi_j + y_m\xi_m) \\ &\quad \cdot\xi_i \frac{\partial(x,y)}{\partial(\xi_i,\xi_j)} d\xi_i d\xi_j \\ &= \iint\limits_{\triangle_e'} f((x_i - x_m)\xi_i + (x_j - x_m)\xi_j + x_m, (y_i - y_m)\xi_i \\ &\quad +(y_j - y_m)\xi_j + y_m)\xi_i d\xi_i d\xi_j, \end{aligned} \tag{4.3.33}$$

其中

$$\triangle_e' = \{(\xi_i,\xi_j) \in R^2 | \xi_i \geq 0, \xi_j \geq 0, \xi_i + \xi_j \leq 1\}$$

是在 (ξ_i,ξ_j) 平面中以 ξ_i 轴, ξ_j 轴及直线 $\xi_i + \xi_j = 1$ 所围成的三角形.

如果 $f = f(x,y)$ 是 x, y 的多项式, 则 (4.3.16) 中的被积函数

$$f(x,y)\xi_i = f(x_i\xi_i + x_j\xi_j + x_m\xi_m, y_i\xi_i + y_j\xi_j + y_m\xi_m)\xi_i$$

为 ξ_i, ξ_j, ξ_m 的多项式, 则可利用下面推出的积分公式 (4.3.34) 计算出 (4.3.16) 的值. 利用变数代换 $\xi_j = (1 - \xi_i)t$ 及 β 函数的积分

公式

$$\int_0^1 \xi^k(1-\xi)^m d\xi = \frac{k!m!}{(k+m+1)!},$$

得出

$$\frac{1}{2\triangle_e}\iint\limits_{\triangle_e} \xi_i^{l_i}\xi_j^{l_j}\xi_m^{l_m}dxdy$$

$$=\iint\limits_{\triangle_e'} \xi_i^{l_i}\xi_j^{l_j}(1-\xi_i-\xi_j)^{l_m}d\xi_i d\xi_j$$

$$=\int_0^1\left(\int_0^{1-\xi_i} \xi_i^{l_i}\xi_j^{l_j}(1-\xi_i-\xi_j)^{l_m}d\xi_j\right)d\xi_i$$

$$=\int_0^1 \xi_i^{l_i}(1-\xi_i)^{l_j+l_m+1}d\xi_i\int_0^1 t^{l_j}(1-t)^{l_m}dt$$

$$=\frac{l_i!(l_j+l_m+1)!}{(l_i+l_j+l_m+2)!}\frac{l_j!l_m!}{(l_j+l_m+1)!},$$

由此得出重要计算公式

$$\frac{1}{2\triangle_e}\iint\limits_{\triangle_e} \xi_i^{l_i}\xi_j^{l_j}\xi_m^{l_m}dxdy = \frac{l_i!l_j!l_m!}{(l_i+l_j+l_m+2)!}. \tag{4.3.34}$$

对任意形状的区域 Ω, 用有限元素法求近似解时，可以适当布置结点，使多边形区域 Ω' 充分接近 Ω, 可以编制从列出线性方程组 (4.3.15) 到解出 $u_1, u_2, \cdots, u_n$ 的通用程序. 下面举出一个用手算的例子.

设有一边长为 $4l$ 的正方形金属板，其上、下两面均与外界无热交换，已经测得它在边界上的温度，如图 1. 今求在内部结点上的温度的近似值. 此时温度函数 $u(x,y)$ 满足 Laplace 方程，即所求温度函数 $u(x,y)$ 是 Dirichlet 问题 (4.3.2) 当 $f(x,y)\equiv 0$ 时的解.

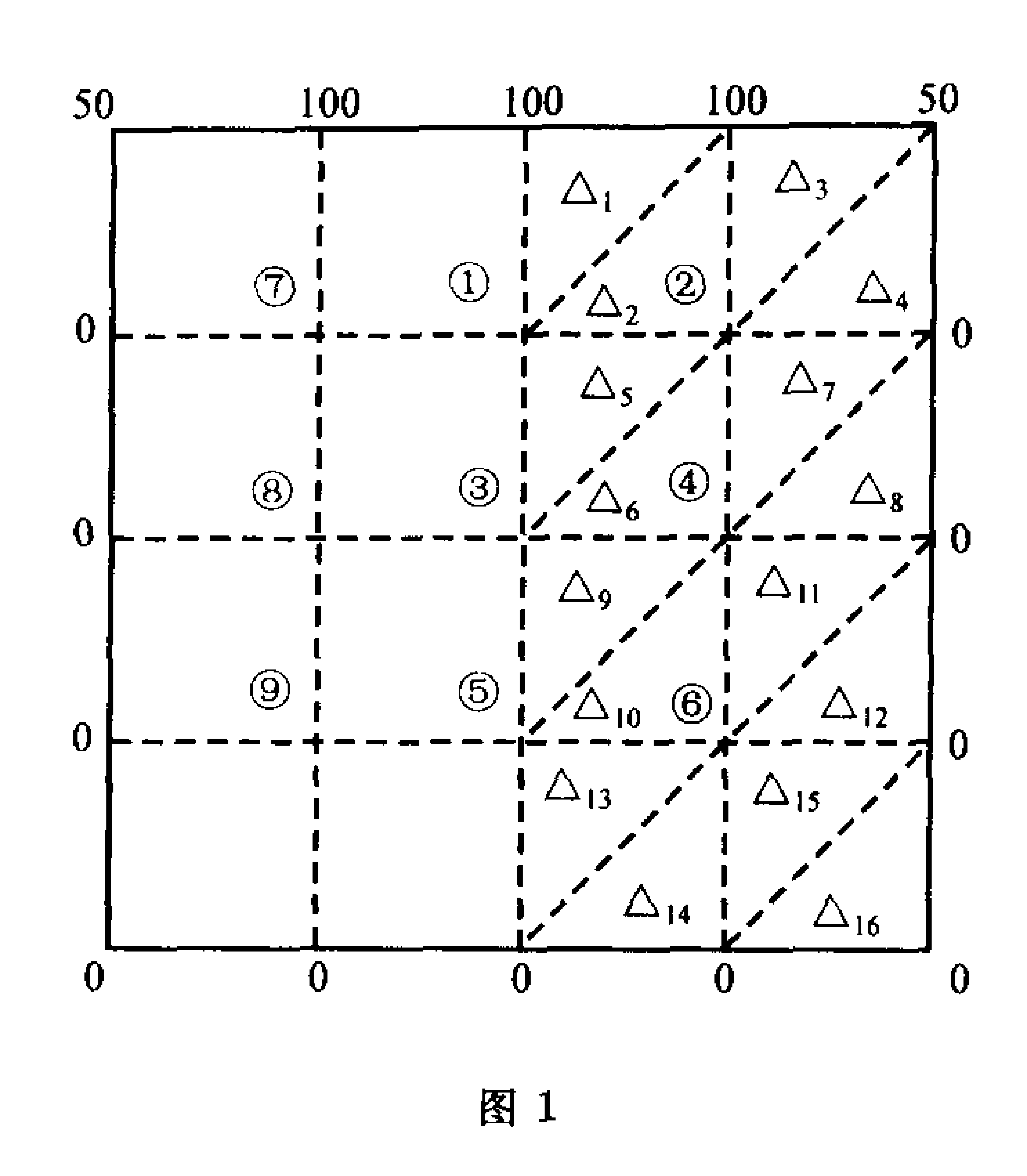


图 1

由于区域及边界条件的对称性，只需考虑区域的一半．如图 1, 剖分右半部分区域为 16 个三角形元素，内部结点为 ①, ②, $\cdots$, ⑥. 由于 $2\triangle_e = l^2(e=1,2,\cdots,16)$ 及 $f(x,y)\equiv 0$, 合并 (4.3.14) 及 (4.3.15) 得出

$$I(u) = I(u_1,\cdots,u_6) = \frac{1}{4l^2}\sum_{i=1}^{16}(B_l^2 + C_l^2). \tag{4.3.35}$$

由 (4.3.9) 看出，对两个三角形元素，如果经过平移后它们可以重合，则数值 $b_i, b_j, b_m, c_i, c_j, c_m$ 相同．因此，图 1 中的元素可以分为两类：

(i) 坐标分别以 (x_0, y_0), $(x_0, y_0 - l)$, $(x_0 + l, y_0)$ 为顶点 ⓘ, ⓙ, ⓜ 的元素；

(ii) 坐标分别以 (x_0, y_0), $(x_0, y_0 + l)$, $(x_0 - l, y_0)$ 为顶点 ⓘ, ⓙ, ⓜ 的元素．

相应于这两类元素的 $b_i, b_j, b_m, c_i, c_j, c_m$ 分别为

(i) $b_i = -l,\ b_j = 0,\ b_m = l,\ c_i = l,\ c_j = -l,\ c_m = 0$;

(ii) $b_i = l,\ b_j = 0,\ b_m = -l,\ c_i = -l,\ c_j = l,\ c_m = 0$.

于是，由 (4.3.8) 及 (4.3.9) 得出

$$B_e = b_i u_i + b_j u_j + b_m u_m = \begin{cases} l(u_m - u_i), & \text{对(i)类元素}, \\ l(u_i - u_m), & \text{对(ii)类元素}. \end{cases}$$

$$C_e = c_i u_i + c_j u_j + c_m u_m = \begin{cases} l(u_i - u_j), & \text{对(i)类元素}, \\ l(u_j - u_i), & \text{对(ii)类元素}. \end{cases}$$

此式可归结为

$$\begin{cases} \dfrac{B_e}{l} = \text{水平边上右端结点上的函数值} \\ \qquad -\text{水平边上左端结点上的函数值}, \\ \dfrac{C_e}{l} = \text{铅垂边上上方结点上的函数值} \\ \qquad -\text{铅垂边上下方结点上的函数值}. \end{cases}$$

将此计算规律应用于 (4.3.35) 得出

$$I(u_1, \cdots, u_6) = \frac{1}{4}\left\{\sum_{e=1}^{16}\left(\frac{B_e}{l}\right)^2 + \sum_{e=1}^{16}\left(\frac{C_e}{l}\right)^2\right\}$$

$$= \frac{1}{4}\{2(u_2 - u_1)^2 + 50^2 + 2u_2^2 + 2(u_4 - u_3)^2 + 2u_4^2 + 2(u_6 - u_5)^2$$

$$+2u_6^2 + (100 - u_1)^2 + 2(100 - u_2)^2 + 50^2 + (u_1 - u_3)^2$$

$$+2(u_2 - u_4)^2 + (u_3 - u_5)^2 + 2(u_4 - u_6)^2 + u_5^2 + 2u_6^2\}.$$

选取 $u_1, u_2, \cdots, u_6$ 使上式取极小值，即需

$$\frac{\partial I}{\partial u_1} = u_1 - u_2 + \frac{1}{2}(u_1 - 100) + \frac{1}{2}(u_1 - u_3) = 0,$$

$$\frac{\partial I}{\partial u_2} = u_2 - u_1 + u_2 + u_2 - 100 + u_2 - u_4 = 0,$$

$$\frac{\partial I}{\partial u_3} = u_3 - u_4 - \frac{1}{2}(u_1 - u_3) + \frac{1}{2}(u_3 - u_5) = 0,$$

$$\frac{\partial I}{\partial u_4} = u_4 - u_3 + u_4 + u_4 - u_2 + u_4 - u_6 = 0,$$

$$\frac{\partial I}{\partial u_5} = u_5 - u_6 + \frac{1}{2}(u_5 - u_3) + \frac{1}{2}u_5 = 0,$$

$$\frac{\partial I}{\partial u_6} = u_6 - u_5 + u_6 + u_6 - u_4 + u_6 = 0.$$

将此方程组化简得出

$$\begin{cases} 4u_1 & -2u_2 & -u_3 & & & & = & 100, \\ -u_1 & +4u_2 & & -u_4 & & & = & 100, \\ -u_1 & & +4u_3 & -2u_4 & -u_5 & & = & 0, \\ & -u_2 & -u_3 & +4u_4 & & -u_6 & = & 0, \\ & & -u_3 & & +4u_5 & -2u_6 & = & 0, \\ & & & -u_4 & -u_5 & +4u_6 & = & 0. \end{cases} \tag{4.3.36}$$

对应于 Laplace 方程平均值定理，上面方程组中第 i 个方程表明：u 在结点 i 上的值等于 u 在与 i 相邻的 4 个结点上的平均值.

解线性方程组 (4.3.36) 得出

$$u_1 = \frac{1475}{28} = 52.679, \quad u_2 = \frac{300}{7} = 42.857, \quad u_3 = 25,$$

$$u_4 = \frac{75}{4} = 18.75, \qquad u_5 = \frac{275}{28} = 9.821, \qquad u_6 = \frac{50}{7} = 7.143,$$

再由对称性知 $u_7 = u_2, u_8 = u_4, u_9 = u_6$. 这样，就得出所有内部结点上的温度的近似值.

由定理 3.6.1 知道，如果增加结点而把元素剖分得更小，则得出的近似解将更接近于精确解. 对于工程技术中的实际问题，为了符合精确度的要求，往往需要剖分成很小的元素，因而结点的个数很多，这就要求解含大量未知量的线性代数方程组. 所以应用有限元素法时，一般要利用计算机求解. 但我们看到，如 (4.3.36)，这样的线性方程组的系数中有大量的零，即其系数矩阵中非零元素是稀疏的 (此种矩阵称为 **稀疏矩阵**). 因此可以尽量少存贮零元素以节省存贮，从而用较小型的计算机解较复杂的实际问题.

4.4 二维有限元素法近似解的误差估计

本节对三角形剖分的有限元素法，求 Dirichlet 问题 (4.3.2) 的近似解的误差估计.

引理 4.4.1 设 $u \in C^2(\overline{\triangle_e})$，且在 $\overline{\triangle_e}$ 上有

$$\left|\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right| \le M, \quad \left|\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right| \le M, \quad \left|\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right| \le M, \tag{4.4.1}$$

函数 $u(x,y)$ 在元素 $\triangle_e$ 的结点 ⓘ, ⓙ, ⓜ 上的值分别为

$$u(x_i, y_i) = u_i, \quad u(x_j, y_j) = u_j, \quad u(x_m, y_m) = u_m.$$

在 $\triangle_e$ 上定义线性插值函数

$$\bar{u}(x,y) = \xi_i u_i + \xi_j u_j + \xi_m u_m, \tag{4.4.2}$$

其中 (ξ_i, ξ_j, ξ_m) 为点 (x,y) 的重心坐标. 那么有下列估计

$$\left|\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial x}\right| \le 4M\frac{h}{\sin\theta}, \quad \left|\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y}\right| \le 4M\frac{h}{\sin\theta}, \tag{4.4.3}$$

其中 h 是 $\triangle_e$ 的最大边长，θ 为 $\triangle_e$ 的最小角.

证 设 (x,y) 为 $\triangle_e$ 内任一点，由 Taylor 公式，对 $k = i, j, m$ 有

$$u_k = u(x_k, y_k) = u(x,y) + (x_k - x)\frac{\partial u}{\partial x} + (y_k - y)\frac{\partial u}{\partial y} + R_k, \tag{4.4.4}$$

$$\begin{aligned} R_k = \frac{1}{2}\Big\{&(x_k - x)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(\bar{x}_k, \bar{y}_k) + 2(x_k - x)(y_k - y)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(\bar{x}_k, \bar{y}_k) \\ &+ (y_k - y)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(\bar{x}_k, \bar{y}_k)\Big\}, \end{aligned} \tag{4.4.5}$$

其中 $(\bar{x}_k, \bar{y}_k)$ 为 (x_k, y_k) 与 (x,y) 连接线段中的一个点，即

$$\bar{x}_k = x + \theta_k(x_k - x), \bar{y}_k = y + \theta_k(y_k - y), \quad 0 < \theta_k < 1.$$

将函数 (4.4.2) 微分后，再将 (4.4.4) 代入得出

$$\begin{aligned}\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} &= \sum_{k=i,j,m} \frac{\partial \xi_k}{\partial x} u_k \\ &= \sum_{k=i,j,m} \frac{\partial \xi_k}{\partial x} u(x,y) + \sum_{k=i,j,m} (x_k - x) \frac{\partial \xi_k}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} \\ &\quad + \sum_{k=i,j,m} (y_k - y) \frac{\partial \xi_k}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + \sum_{k=i,j,m} \frac{\partial \xi_k}{\partial x} R_k.\end{aligned} \tag{4.4.6}$$

由 (4.3.11) 及 (4.3.9) 有

$$\frac{\partial \xi_i}{\partial x} = \frac{y_j - y_m}{2\triangle_e}, \frac{\partial \xi_j}{\partial x} = \frac{y_m - y_i}{2\triangle_e}, \frac{\partial \xi_m}{\partial x} = \frac{y_i - y_j}{2\triangle_e}. \tag{4.4.7}$$

由此得出

$$\sum_{k=i,j,m} \frac{\partial \xi_k}{\partial x} = 0,$$

$$\begin{aligned}\sum_{k=i,j,m} (x_k - x) \frac{\partial \xi_k}{\partial x} &= \sum_{k=i,j,m} x_k \frac{\partial \xi_k}{\partial x} \\ &= \frac{1}{2\triangle_e} [x_i(y_j - y_m) + x_j(y_m - y_i) + x_m(y_i - y_j)] \\ &= \frac{1}{2\triangle_e} \begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_m & y_m \end{vmatrix} = 1,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum_{k=i,j,m} (y_k - y) \frac{\partial \xi_k}{\partial x} &= \sum_{k=i,j,m} y_k \frac{\partial \xi_k}{\partial x} \\ &= \frac{1}{2\triangle_e} [y_i(y_j - y_m) + y_j(y_m - y_i) + y_m(y_i - y_j)] = 0.\end{aligned}$$

把这三个式子代入 (4.4.6) 得出

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} + \sum_{k=i,j,m} \frac{\partial \xi_k}{\partial x} R_k. \tag{4.4.8}$$

由 (4.4.5) 及 (4.4.1) 有

$$
\begin{aligned}
|R_k| &\le \frac{M}{2}\{|x_k - x| + |y_k - y|\}^2 \\
&\le M(|x_k - x|^2 + |y_k - y|^2) \le Mh^2.
\end{aligned}
$$

因此，由 (4.4.8) 及 (4.4.7) 有

$$
\begin{aligned}
\left|\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial x}\right| &= \left|\sum_{k=i,j,m} \frac{\partial \xi_k}{\partial x} R_k\right| \le Mh^2 \sum_{k=i,j,m} \left|\frac{\partial \xi_k}{\partial x}\right| \\
&= Mh^2 \frac{|y_j - y_m| + |y_m - y_i| + |y_i - y_j|}{2\triangle_e}.
\end{aligned} \tag{4.4.9}
$$

设元素 $\triangle_e$ 的三边 h_i, h_j, h_m 中， $h = h_m$ 最长，最小角 θ 的对边为 h_i, 即有

$$h = h_m \ge h_j \ge h_i.$$

由此知

$$2h_j \ge h_i + h_j > h_m = h,$$

$$\triangle_e = \frac{1}{2} h_j h_m \sin\theta \ge \frac{h^2}{4}\sin\theta.$$

将此不等式代入 (4.4.9), 并利用

$$
\begin{aligned}
&|y_j - y_m| + |y_m - y_i| + |y_i - y_j| \\
&= 2\max(|y_j - y_m|, |y_m - y_i|, |y_i - y_j|) \le 2h
\end{aligned}
$$

得出 (4.4.3) 的第一式. 同法可证 (4.4.3) 的第二式. 证完.

现在讨论 Dirichlet 问题 (4.3.2) 的有限元素法近似解的误差估计. 如 4.3 节所述, 把区域 Ω 近似地看成由三角形元素 $\triangle_1, \triangle_2, \cdots,$ $\triangle_m$ 组成的多边形 Ω', 把边界函数 ψ 在多边形 Ω' 上的每一边上近似地看成线性函数，我们将在这种意义下得出有限元素法近似解的误差估计.

定理 4.4.2 设 Ω 是由三角形元素 $\triangle_1, \triangle_2, \cdots, \triangle_m$ 所组成的多边形区域，边界函数 ψ 在多边形 Ω 的每一边上是线性函数. 再

设

$$u(x,y) \in C_\psi^2 = \{u \in C^2(\overline{\Omega}) | u = \psi, \text{ 在 } \partial\Omega \text{ 上}\}$$

满足 Poisson 方程 $\triangle u = f$, 且在 $\overline{\Omega}$ 上有

$$\left|\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right| \le M, \quad \left|\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right| \le M, \quad \left|\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right| \le M, \tag{4.4.10}$$

而 $\tilde{u}(x,y)$ 是 Dirichlet 问题 (4.3.2) 的有限元素法解，那么有下列估计

$$\int\int_\Omega \left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 \Bigg] dxdy \le 32M^2 |\Omega| \frac{h^2}{\sin^2\theta}, \tag{4.4.11}$$

$$\int\int_\Omega (\tilde{u} - u)^2 dxdy \le 16M^2 H^4 \frac{h^2}{\sin^2\theta}, \tag{4.4.12}$$

其中 h 为所有元素 $\triangle_e$ 的边长的最大值， θ 为所有元素 $\triangle_e$ 的角的最小值，而 H 是包含 Ω 且边平行于坐标轴的最小正方形的边长.

证 命 $\psi(x_i, y_i) = u_i (i = n+1, n+2, \cdots, n+s)$. 采用记号

$$D(v) = \frac{1}{2}\int_\Omega \left[\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2\right] dxdy,$$

$$I(v) = D(v) - \int_\Omega fvdx,$$

$$P_n = \left\{\sum_{i=1}^{n+s} B_i(x,y) u_i | u_1, \cdots, u_n \in R\right\}.$$

$\tilde{u}(x,y)$ 是 Dirichlet 问题 (4.3.2) 的有限元素法解，即

$$I(\tilde{u}) = \min_{v \in P_n} I(v). \tag{4.4.13}$$

由于 ψ 在多边形 Ω 的每一边上都是线性函数，故有

$$v = \psi, \text{ 在 } \partial\Omega \text{ 上} \quad \forall v \in P_n. \tag{4.4.14}$$

仿定理 1.3.1 可以证明

$$I(v)-I(u)=D(v-u), \quad \forall v\in P_n. \tag{4.4.15}$$

事实上，对任意 $v\in P_n$，令 $\varphi=v-u$，则在 $\partial\Omega$ 上有 $\varphi=0$. 以 $v=u+\varphi$ 代入 $D(v)$，经计算得出

$$D(v)=D(u)+D(\varphi)+\int_\Omega\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)dxdy. \tag{4.4.16}$$

在元素 $\triangle_e$ 上应用格林公式 (1.3.7) 得出

$$\int_{\triangle_e}\varphi\triangle udxdy+\int_{\triangle_e}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)dxdy=\int_{\partial\triangle_e}\varphi\frac{\partial u}{\partial n}ds. \tag{4.4.17}$$

我们可以证明

$$\sum_{e=1}^{m}\int_{\partial\triangle_e}\varphi\frac{\partial u}{\partial n}ds=0. \tag{4.4.18}$$

因为当元素 $\triangle_e$ 的某个边 L 与多边形 Ω 的一个边重合时，由于 φ 在 $\partial\Omega$ 上为零，故有 $\int_L\varphi\frac{\partial u}{\partial n}ds=0$；当 L 为两个元素 $\triangle_e$ 及 $\triangle_s$ 的公共边时，由于 $\triangle_e$ 及 $\triangle_s$ 在 L 上的法线 n 有相反的指向，即对于 $\triangle_e$ 及 $\triangle_s$，$\frac{\partial u}{\partial n}$ 在其公共边 L 上的值彼此反号，因而有

$$\int_{\partial\triangle_e\bigcap L}\varphi\frac{\partial u}{\partial n}ds+\int_{\partial\triangle_s\bigcap L}\varphi\frac{\partial u}{\partial n}ds=0.$$

这就证明了 (4.4.18) 是成立的. 于是，将 (4.4.17) 对所有元素 $\triangle_e$ 的编号 $e=1,2,\cdots,m$ 求和后得出

$$\int_\Omega\varphi\triangle udxdy+\int_\Omega\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)dxdy=0.$$

由此有

$$\begin{aligned}\int_\Omega\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)dxdy&=-\int_\Omega\varphi\triangle udxdy\\&=\int_\Omega(v-u)fdxdy.\end{aligned}$$

将此式代入 (4.4.16) 就得出 (4.4.15).

命 $u(x_i,y_i)=u_i(i=1,2,\cdots,n),\bar{u}(x,y)=\sum\limits_{i=n+1}^{n+s}B_i(x,y)u_i\in$ P_n, 由 (4.4.13) 有

$$I(\tilde{u})=\min_{v\in P_n}I(v)\leq I(\bar{u}).$$

因此，利用等式 (4.4.15) 得出

$$D(\tilde{u}-u)=I(\tilde{u})-I(u)\leq I(\bar{u})-I(u)=D(\bar{u}-u). \qquad (4.4.19)$$

由 $D(v)$ 的定义及引理 4.4.1 有

$$\begin{aligned}D(\bar{u}-u)&=\frac{1}{2}\int_\Omega\left[\left(\frac{\partial\bar{u}}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\bar{u}}{\partial y}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]dxdy\\&=\frac{1}{2}\sum_{e=1}^m\int_{\triangle_e}\left[\left(\frac{\partial\bar{u}}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\bar{u}}{\partial y}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]dxdy\\&\leq\left(4M\frac{h}{\sin\theta}\right)^2\sum_{e=1}^m\triangle_e=16M^2|\Omega|\frac{h^2}{\sin^2\theta}.\end{aligned}$$

以此式代入 (4.4.19) 得出估计 (4.4.11).

由于 $\bar{u}-u$ 在 $\partial\Omega$ 上为零，设

$$\Omega\subset Q=\{(x,y)|a\leq x\leq a+H,\ c\leq y\leq c+H\},$$

且在 $Q\backslash\Omega$ 中令 $u=0$, 则由引理 4.2.1, 对固定的 y 及 $b=a+H$ 有 $\bar{u}-u\in V$, 从而一维 Friedrichs 不等式

$$\int_a^{a+H}(\bar{u}-u)^2dx\leq H^2\int_a^{a+H}\left(\frac{\partial\bar{u}}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2dx$$

成立．此式对 y 在 $[c,c+H]$ 上积分就得出

$$\int_\Omega(\bar{u}-u)^2dxdy\leq H^2\int_\Omega\left(\frac{\partial\bar{u}}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2dxdy,$$

同理可得

$$\int_{\Omega}(\tilde{u}-u)^2dxdy \leq H^2\int_{\Omega}\left(\frac{\partial\tilde{u}}{\partial y}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2dxdy.$$

此两式相加后再利用不等式 (4.4.11) 得出 (4.4.12).

注 1 定理 4.4.2 说明，在进行三角形剖分时，如果保持三角形元素的所有角 θ 都满足条件 $\theta \geq \theta_0 > 0$，则当 $h \to 0$ 时，有限元素法近似解 $\tilde{u}$ 在 Sobolev 空间 $W^{1,2}(\Omega)$ 中收敛于精确解 u.

注 2 定理 4.4.2 说明，进行三角形剖分时，使元素的最大边越小而最小角越大，则有限元素法近似解越精确. 因此，当剖分成的元素个数相同 (即有相同的计算量) 时，剖分方法的不同也会使近似解有不同的精确度. 例如，把图 2 中的四边形剖分成两个三角形，则左边的剖分比右边的剖分好一些.

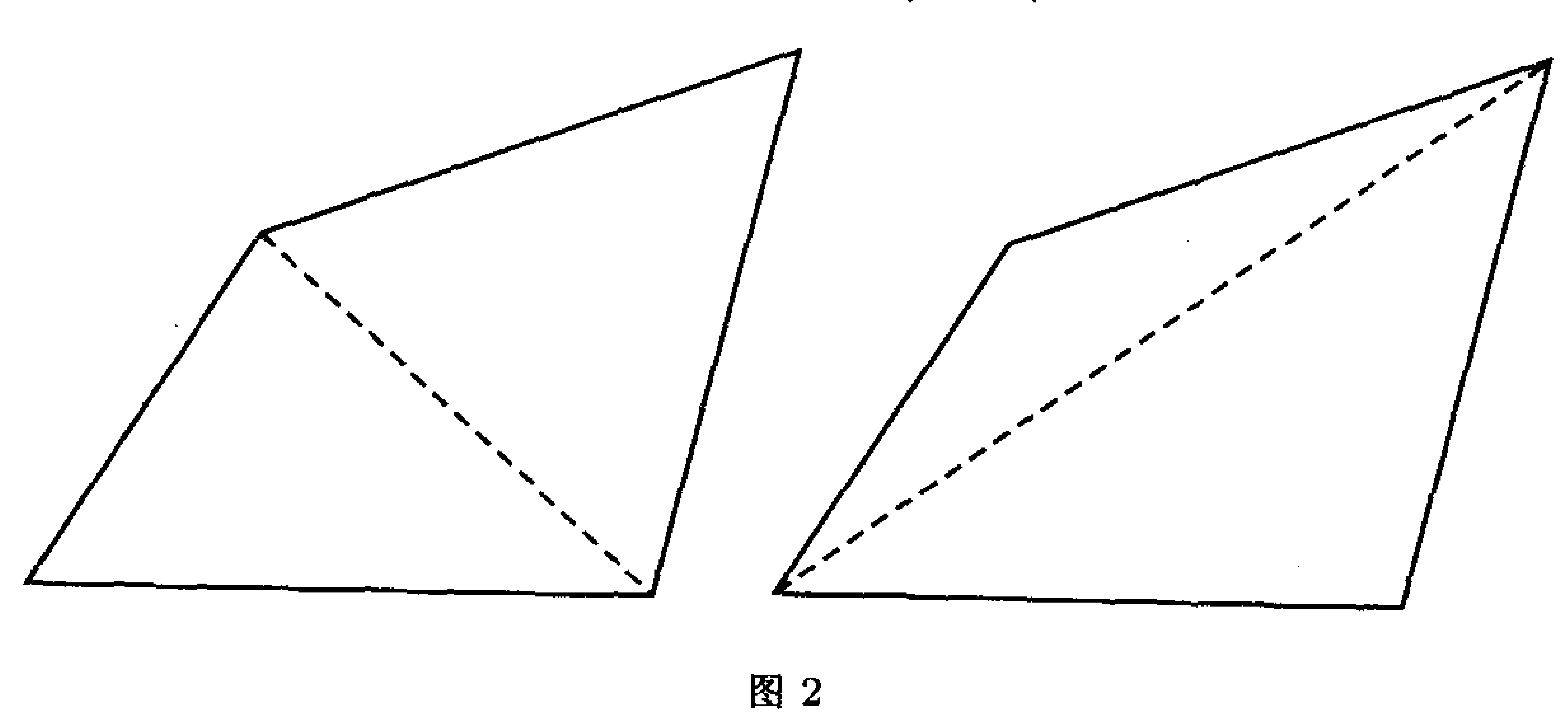


图 2

4.5 关于初 – 边值问题

有限元素法广泛应用于椭圆形方程的边值问题. 把有限元素剖分与伽辽金方法结合起来还可以求抛物型方程及双曲型方程的初 – 边值问题的近似解. 本节以热传导方程为例子说明这种求解的方法.

讨论抛物型方程的初 – 边值问题

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u + f(x,y,t),\ (x,y) \in \Omega,\ t > 0, \tag{4.5.1}$$

$$u(x,y,0)=u_0(x,y),\ (x,y)\in\Omega, \tag{4.5.2}$$

$$u(x,y,t)=0,\ (x,y)\in\partial\Omega,\ t\geq 0. \tag{4.5.3}$$

将区域 Ω 进行三角形剖分，设内部结点为 ①, ②, $\cdots$, ⓝ. 把初－边值问题 (4.5.1)$\sim$ (4.5.3) 的解 $u(x,y,t)$ 先对空间变量离散化，设 $u(x,y,t)$ 在点 i 的值为 $u_i(t)$, 即

$$u(x_i,y_i,t)=u_i(t). \tag{4.5.4}$$

再根据 (4.3.13) 在 Ω 上的构造插值函数

$$u(x,y,t)=\sum_{i=1}^{n}u_i(t)B_i(x,y), \tag{4.5.5}$$

这里已利用了边界条件 (4.5.3), 即 $u_{n+1}(t)=\cdots=u_{n+s}(t)=0$.

以 $B_j(x,y)$ 乘方程 (4.5.1) 及初值条件 (4.5.2) 后，再在 Ω 上积分得出

$$\int_\Omega\frac{\partial u}{\partial t}B_j(x,y)dxdy=\int_\Omega(\triangle u+f)B_j(x,y)dxdy, \tag{4.5.6}$$

$$\int_\Omega u(x,y,0)B_j(x,y)dxdy=\int_\Omega u_0(x,y)B_j(x,y)dxdy=c_j(\text{常数}). \tag{4.5.7}$$

由格林公式 (1.3.7) 有

$$\int_\Omega B_j\triangle u dxdy+\int_\Omega\left(\frac{\partial B_j}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial B_j}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial y}\right)dxdy$$
$$=\sum_{e=1}^{m}\int_{\partial\triangle_e}B_j\frac{\partial u}{\partial n}ds=0.$$

以此式代入 (4.5.6) 得出

$$\int_\Omega\frac{\partial u}{\partial t}B_j(x,y)dxdy+\int_\Omega\left(\frac{\partial B_j}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial B_j}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial y}\right)dxdy=F_j(t), \tag{4.5.8}$$

$$F_j(t) = \int_\Omega f(x,y,t)B_j(x,y)dxdy.$$

以 (4.5.5) 代入 (4.5.8) 及 (4.5.7) 得出

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} A_{ij}u_i'(t) + \sum_{i=1}^{n} B_{ij}u_i(t) = F_j(t), \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{n} A_{ij}u_i(0) = c_j, \end{cases} \quad (j = 1, 2, \cdots, n) \qquad (4.5.9)$$

其中

$$\begin{cases} A_{ij} = \displaystyle\int_\Omega B_i B_j dxdy, \\ B_{ij} = \displaystyle\int_\Omega \left(\frac{\partial B_i}{\partial x}\frac{\partial B_j}{\partial x} + \frac{\partial B_i}{\partial y}\frac{\partial B_j}{\partial y} \right) dxdy, \end{cases} \quad (j = 1, 2, \cdots, n)$$

(4.5.10)

(4.5.9) 是未知函数 $u_1(t), u_2(t), \cdots, u_n(t)$ 的常系数一阶常微分方程组的初值问题. 由于 $B_1, B_2, \cdots, B_n$ 是线性无关的, 容易证明矩阵 (A_{ij}) 的行列式不为零, 故初值问题 (4.5.9) 又可简化成

$$\begin{cases} u_i'(t) + \displaystyle\sum_{j=1}^{n} K_{ij}u_j(t) = G_i(t) \quad (i = 1, 2, \cdots, n), & (4.5.11) \\ u_i(0) = u_{i0} \quad (i = 1, 2, \cdots, n), & (4.5.12) \end{cases}$$

由这个方程组及初值条件可以解出 $u_1(t), u_2(t), \cdots, u_n(t)$, 把它们代入 (4.5.5) 就得到初 – 边值问题 (4.5.1)~(4.5.3) 的近似解.

为了求数值解, 我们还可以把常微分方程组初值问题 (4.5.11)~(4.5.12) 用有限差分法化成线性代数方程组求解. 这里介绍解这种初值问题的一种比较好的差分格式. 取步长为 $\triangle t$, 命

$$u_i^{(k)} = u_i(k \triangle t), G_i^{(k)} = G_i(k \triangle t)$$
$$(i = 1, 2, \cdots, n; k = 1, 2, 3, \cdots). \qquad (4.5.13)$$

方程组 (4.5.11) 可以近似地写成

$$\frac{u_i^{(k+1)}-u_i^{(k)}}{\triangle t}+\sum_{j=1}^{n}K_{ij}\frac{u_j^{(k+1)}+u_j^{(k)}}{2}=\frac{G_i^{(k+1)}+G_i^{(k)}}{2}$$

$$(i=1,2,\cdots,n).$$

即

$$\sum_{j=1}^{n}\left(\delta_{ij}+\frac{\triangle t}{2}K_{ij}\right)u_j^{(k+1)}$$

$$=\sum_{j=1}^{n}\left(\delta_{ij}-\frac{\triangle t}{2}K_{ij}\right)u_j^{(k)}+\frac{\triangle t}{2}(G_i^{(k+1)}+G_i^{(k)})\quad(i=1,2,\cdots,n). \tag{4.5.14}$$

当 $\triangle t$ 充分小时，此方程组的系数行列式

$$\det\left[\delta_{ij}+\frac{\triangle t}{2}K_{ij}\right]\neq 0.$$

由 (4.5.13), 初值条件 (4.5.12) 变为 $u_i^{(0)}=u_{i0}(i=1,\cdots,n)$, 因而由方程组 (4.5.14) 依次对 $k=1,2,3,\cdots$ 可以计算出 $u_1^{(k)}, u_2^{(k)},\cdots, u_n^{(k)}$. 再由 (4.5.4),(4.5.5) 及 (4.5.13) 得到近似解

$$u(x_i,y_i,k\triangle t)=u_i^{(k)}\quad(i=1,2,\cdots,n;k=1,2,3,\cdots),$$

或

$$u(x,y,k\triangle t)=\sum_{i=1}^{n}u_i^{(k)}B_i(x,y)\quad(k=1,2,3,\cdots).$$

4.6 关于元素的剖分

对于二阶微分方程二维边值问题，用有限元素法求解时，通常像上面那样将区域剖分为一些三角形 (称为 **三角形剖分**), 此时每个元素上的插值函数是一次函数. 为了提高近似解的精确度,

可以把元素剖分得小一些，但也可以升高插值多项式的次数来达到提高近似解的精确度的目的．另一方面，由于二阶方程边值问题对应的泛函只含有未知函数的一阶导数，所以插值函数可以取一次函数．如果讨论的是四阶方程 (如双调和方程), 对应的泛函中将含有未知函数的二阶导数，则插值函数必须取为次数大于 1 的多项式．六结点三角形元素 (即把三边中点也看成结点) 的插值函数就是二次多项式

$$u_e(x,y)=\xi_i(2\xi_i-1)u_i+\xi_j(2\xi_j-1)u_j+\xi_m(2\xi_m-1)u_m$$
$$+4\xi_j\xi_m u_{jm}+4\xi_m\xi_i u_{mi}+4\xi_i\xi_j u_{ij},$$

其中 u_{jn} 为解 u 在连接顶点 ⓙ, ⓜ 的边的中点上的值．

对于平面区域 Ω 可以进行三角形剖分，也可以进行四边形剖分．顶点为 ①, ②, ③, ④ 的平行四边形 P_e 上的插值函数为二次多项式

$$u_e(x,y)=\eta_1u_1+\eta_2u_2+\eta_3u_3+\eta_4u_4,$$

其中

$$\eta_1=\frac{L_{23}L_{34}}{(L_{23}L_{34})_1}=\frac{P_e^1}{P_e},\quad \eta_2=\frac{L_{34}L_{41}}{(L_{34}L_{41})_2}=\frac{P_e^2}{P_e},$$
$$\eta_3=\frac{L_{41}L_{12}}{(L_{41}L_{12})_3}=\frac{P_e^3}{P_e},\quad \eta_4=\frac{L_{12}L_{23}}{(L_{12}L_{23})_4}=\frac{P_e^4}{P_e}$$

为重心坐标 (面积坐标), P_e^1, P_e^2, P_e^3, P_e^4 是过 (x,y) 而且边平行的直线把 P_e 分成的 4 个小四边形，而 P_e^i 是与顶点 ⓘ 相对的那一个小四边形 $(i=1,2,3,4)$. 这样的插值多项式在 P_e 的边上变为一次式．因此，所有平行四边形元素的插值函数在整个区域 Ω 上是连续且分块连续可微的函数．不仅如此，而且混合剖分，即一部分元素是三角形而其余元素是平行四边形也是允许的．这时，插值函数在整个区域 Ω 上仍然是连续且分块连续可微的．

对三维问题，可将区域剖分为四面体元素或六面体元素．对结点为 ①, ②, ③, ④ 的四面体元素 Q, 插值函数为一次函数

$$u_e(x,y)=\xi_1u_1+\xi_2u_2+\xi_3u_3+\xi_4u_4,$$

其中 $(\xi_1,\xi_2,\xi_3,\xi_4)$ 为重心坐标 (体积坐标), 即

$$\xi_1=\frac{\pi_1}{(\pi_1)_1},\ \xi_2=\frac{\pi_2}{(\pi_2)_2},\ \xi_3=\frac{\pi_3}{(\pi_3)_3},\ \xi_4=\frac{\pi_4}{(\pi_4)_4},$$

而 π_i 表示结点 ⓘ 的对面的平面方程 $\pi_i=0$ 的左端, 例如

$$\pi_1=\pi_1(x,y,z)=\begin{vmatrix}1 & x & y & z\\ 1 & x_2 & y_2 & z_2\\ 1 & x_3 & y_3 & z_3\\ 1 & x_4 & y_4 & z_4\end{vmatrix},$$

$$\pi_2=\pi_2(x,y,z)=\begin{vmatrix}1 & x_1 & y_1 & z_1\\ 1 & x & y & z\\ 1 & x_3 & y_3 & z_3\\ 1 & x_4 & y_4 & z_4\end{vmatrix},$$

而 $(\pi_i)_i$ 表示线性函数 $\pi_i(x,y,z)$ 在 ⓘ 点的值. 例如

$$(\pi_1)_1=\pi_1(x_1,y_1,z_1),(\pi_2)_2=\pi_2(x_2,y_2,z_2)$$

均为四面体 Q 的体积的 6 倍.

对结点为 ①, ②, $\cdots$, ⑧ 的平行六面体元素, 插值函数为三次多项式

$$u_e(x,y,z)=\sum_{i=1}^{8}\eta_i u_i,$$

其中

$$\eta_i=\frac{\pi_i^{(1)}\pi_i^{(2)}\pi_i^{(3)}}{(\pi_i^{(1)}\pi_i^{(2)}\pi_i^{(3)})_i},\quad i=1,2,\cdots,8.$$

而 $\pi_i^{(1)},\pi_i^{(2)},\pi_i^{(3)}$ 分别为不通过点 i 的三个面的平面方程 $\pi_i^{(1)}=0,\pi_i^{(2)}=0,\pi_i^{(3)}=0$ 的左端, 而 $(\pi_i^{(1)},\pi_i^{(2)},\pi_i^{(3)})_i$ 为函数 $\pi_i^{(1)}\pi_i^{(2)}\pi_i^{(3)}$ 在点 ⓘ 之值.

下篇　近代变分理论与非线性椭圆方程边值问题

第五章　Sobolev 空间

在第二章中讲述过 Sobolev 空间 $W_0^{1,2}(\Omega)$. 本章介绍一般的 Sobolev 空间 $W^{k,p}(\Omega), W_0^{k,p}(\Omega)$ 与各向异性 Sobolev 空间及其基本性质. 这类函数空间是研究微分方程的重要工具.

5.1　几个常用不等式

我们以后常用到下面的一些基本不等式, 有时是不加说明地应用它们.

以下不等式中出现的 $a, a_1, \cdots, a_m$ 及 $b, b_1, \cdots, b_m$ 都是正数, m 是正整数.

Holder 不等式

$$a_1b_1 + \cdots + a_mb_m \le (a_1^p + \cdots + a_m^p)^{\frac{1}{p}}(b_1^{p'} + \cdots + b_m^{p'})^{\frac{1}{p'}}, \quad (5.1.1)$$

其中 $p \ge 1, p' = \dfrac{p}{p-1}$ 称为 p 的共轭指数, 它满足

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1.$$

几何平均数与算术平均数之间有不等式

$$(a_1^{h_1}a_2^{h_2} \cdots + a_m^{h_m})^{\frac{1}{h_1+h_2+\cdots+h_m}} \le \frac{h_1a_1 + h_2a_2 + \cdots + h_ma_m}{h_1 + h_2 + \cdots + h_m}, \quad (5.1.2)$$

其中 $h_1>0,\cdots,h_m>0$. 当

$$m=2, a_1=a^p, a_2=b^{p'}, h_1=\frac{1}{p}, h_2=\frac{1}{p'} \tag{5.1.3}$$

时，由 (5.1.2) 得出下面不等式.

Young 不等式

$$ab\le\frac{a^p}{p}+\frac{a^{p'}}{p'},\quad p\ge1. \tag{5.1.4}$$

对任意 $\varepsilon>0$, 在上式中以 $\varepsilon^{\frac{1}{p}}a$ 代替 a, 以 $\varepsilon^{-\frac{1}{p}}b$ 代替 b 得出内插不等式

$$ab\le\frac{\varepsilon}{p}a^p+\frac{\varepsilon^{-\frac{1}{p-1}}b^{p'}}{p'}\le\varepsilon a^p+\varepsilon^{-\frac{1}{p-1}}b^{p'}, \tag{5.1.5}$$

其中 $\varepsilon>0$, $p\ge1$.

下面的不等式中，如果右端出现 $||u||_p$ 形的范数时，均假定 $u\in L^p(\Omega)$ 而不予说明.

定理 5.1.1 (Hölder 不等式)

$$\int_\Omega uvdx\le||u||_p||v||_{p'},\quad p\ge1. \tag{5.1.6}$$

当 $p=2$ 时，此不等式又叫做 Schwarz 不等式.

证 在 (5.1.4) 中，令 $a=\dfrac{u}{||u||_p}$, $b=\dfrac{v}{||v||_{p'}}$, 再在 Ω 上积分就得到不等式 (5.1.6).

用数学归纳法可以证明 Holder 不等式的一个推广如下：

$$\int_\Omega u_1u_2\cdots u_mdx\le||u_1||_{p_1}||u_2||_{p_2}\cdots||u_m||_{p_m}, \tag{5.1.7}$$

其中 $p_1\ge1, p_2\ge1,\cdots,p_m\ge1$ 满足 $\dfrac{1}{p_1}+\dfrac{1}{p_2}+\cdots+\dfrac{1}{p_m}=1$.

当 $p<q$ 时，由 $\dfrac{q-p}{q}+\dfrac{p}{q}=1$, 利用 Holder 不等式得出

$$\int_\Omega|u|^pdx\le\left(\int_\Omega 1dx\right)^{\frac{q-p}{q}}\left(\int_\Omega|u|^qdx\right)^{\frac{p}{q}}=|\Omega|^{1-\frac{p}{q}}\left(\int_\Omega|u|^qdx\right)^{\frac{p}{q}}.$$

由此得不等式

$$||u||_p \le |\Omega|^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}||u||_q,\ p \le q. \tag{5.1.8}$$

当 $p < q < r$ 且 $\dfrac{1}{q} = \dfrac{\lambda}{p} + \dfrac{1-\lambda}{r}$ 时，由 $1 = \dfrac{q\lambda}{p} + \dfrac{q(1-\lambda)}{r}$，利用 Holder 不等式得出

$$\int_\Omega |u|^q dx = \int_\Omega |u|^{q\lambda}|u|^{q(1-\lambda)}dx \le \left(\int_\Omega |u|^p dx\right)^{\frac{q\lambda}{p}} \left(\int_\Omega |u|^r dx\right)^{\frac{q(1-\lambda)}{r}}$$

由此得出不等式

$$||u||_q \le ||u||_p^\lambda ||u||_r^{1-\lambda},\quad p \le q \le r,\quad \frac{1}{q} = \frac{\lambda}{p} + \frac{1-\lambda}{r}. \tag{5.1.9}$$

在 (5.1.5) 中取 $a = ||u||_r^{1-\lambda}$, $b = ||u||_p^\lambda$, $p = \dfrac{1}{1-\lambda}$ 得出

$$||u||_p^\lambda ||u||_r^{1-\lambda} \le \varepsilon ||u||_r + \varepsilon^{-\frac{1-\lambda}{\lambda}}||u||_p.$$

以此式代入 (5.1.9) 得出内插不等式

$$||u||_q \le \varepsilon ||u||_r + \varepsilon^{-\mu}||u||_p,\quad p \le q \le r,\quad \varepsilon > 0,$$

$$\mu = \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)\left(\frac{1}{q} - \frac{1}{r}\right)^{-1}. \tag{5.1.10}$$

定理 5.1.2(Minkowski 不等式)　对 $p \ge 1$ 有

$$||u+v||_p \le ||u||_p + ||v||_p. \tag{5.1.11}$$

证　由 (5.1.2) 有

$$|u+v|^p \le 2^{p-1}(|u|^p + |v|^p).$$

因此，当 $u, v \in L^p(\Omega)$ 时，有 $u+v \in L^p(\Omega)$. 当 $p = 1$ 时，(5.1.11)

显然成立. 当 $p>1$ 时, 由 Holder 不等式得出

$$\int_{\Omega}|u+v|^{p}dx \le \int_{\Omega}(|u|+|v|)|u+v|^{p-1}dx$$

$$\le \int_{\Omega}|u||u+v|^{p-1}dx+\int_{\Omega}|v||u+v|^{p-1}dx$$

$$\le \left(\int_{\Omega}|u|^{p}dx\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_{\Omega}|u+v|^{p}dx\right)^{\frac{1}{p'}}+\left(\int_{\Omega}|v|^{p}dx\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_{\Omega}|u+v|^{p}dx\right)^{\frac{1}{p'}}.$$

在这个不等式两端约去因子 $(\int_{\Omega}|u+v|^{p}dx)^{\frac{1}{p'}}$ 就得出不等式 (5.1.11).

5.2 平 均 函 数

定义 1 设 $h>0, \rho_h \in C_0^{\infty}(R^n)$ 满足

$$\rho_h(x)=\rho_h(|x|)\ge 0,\ \ \forall x\in R^n,\ \mathrm{supp}\rho_h \subset \overline{B_h(0)},\ \int_{R^n}\rho_h(x)dx=1,$$

则称函数 $\rho_h(x)$ 为 **平均核** 或 **光滑化算子**(mollifier).

例如, 取

$$c=\left(\int_{|x|<h}e^{\frac{1}{|x|^2-h^2}}dx\right)^{-1},$$

则函数

$$\rho_h(x)=\begin{cases} ce^{\frac{1}{|x|^2-h^2}}, & \text{当}|x|<h,\\ 0, & \text{当}|x|\ge h \end{cases} \tag{5.2.1}$$

为光滑化算子.

定义 2 记 $L_{\mathrm{loc}}^{p}(\Omega)=\{u|u\in L^p(\Omega'),\forall \Omega' \subset\subset \Omega\}$. 设 $\{u_k\}\subset L_{\mathrm{loc}}^{p}(\Omega), u\in L_{\mathrm{loc}}^{p}(\Omega)$. 如果对任意 $\Omega' \subset\subset \Omega$, 序列 $\{u_k\}$ 在 $L^p(\Omega')$ 中收敛于 u, 则称 u_k 在 $L_{\mathrm{loc}}^{p}(\Omega)$ 中收敛于 u, 记为 $u_k\to u$ 在 $L_{\mathrm{loc}}^{p}(\Omega)$ 中.

定义 3 设 $u\in L_{\mathrm{loc}}^{1}(\Omega), x\in\Omega$. 当 $h<\mathrm{dist}(x,\partial\Omega)$ 时, 函数

$$u_h(x)=\int_{\Omega}\rho_h(x-y)u(y)dy \tag{5.2.2}$$

称为 u 关于平均核 ρ_h 的 **平均函数** 或 u 关于光滑化算子 ρ_h 的 **正则化**.

显然，当 $u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ 时，对任意的 $\Omega' \subset\subset \Omega$ 有

$$u_h \in C^\infty(\Omega'),\ \forall h < \text{dist}(\Omega', \partial\Omega).$$

如果 $u \in L^1(\Omega)$, 在 $R^n \backslash \Omega$ 中命 $u = 0$, 则 $u \in L^1(R^n)$, 于是有

$$u_h \in C_0^\infty(R^n),\quad \forall h > 0.$$

引理 5.2.1 如果 $u \in L^p(\Omega), \Omega' \subset\subset \Omega$, 则有

$$||u_h||_{p,\Omega'} \le ||u||_{p,\Omega},\quad \forall h < \text{dist}(\Omega', \partial\Omega). \tag{5.2.3}$$

证 当 $h < \text{dist}(\Omega', \partial\Omega)$ 时，对任意 $x \in \Omega'$, 由 (5.2.2) 定义的平均函数是有意义的，利用 Holder 不等式得出

$$\begin{aligned}
|u_h(x)| &= \left| \int_{|y-x|<h} \rho_h^{\frac{1}{p'}}(x-y)\rho_h^{\frac{1}{p}}(x-y)u(y)dy \right| \\
&\le \left(\int_{|y-x|<h} \rho_h(x-y)dy \right)^{\frac{1}{p'}} \left(\int_{|y-x|<h} \rho_h(x-y)|u(y)|^p dy \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \left(\int_{|y-x|<h} \rho_h(x-y)|u(y)|^p dy \right)^{\frac{1}{p}},
\end{aligned}$$

由此知

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega'} |u_k(x)|^p dx &\le \int_{\Omega'} \int_{|y-x|<h} \rho_h(x-y)|u(y)|^p dydx \\
&\le \int_{\Omega'} \int_{B_h(\Omega')} \rho_h(x-y)|u(y)|^p dydx \\
&= \int_{B_h(\Omega')} |u(y)|^p dy \int_{\Omega'} \rho_h(x-y)dx \\
&\le \int_{B_h(\Omega')} |u(y)|^p dy \le \int_\Omega |u(y)|^p dy,
\end{aligned}$$

其中 $B_h(\Omega')=\{x\in R^n|\text{dist}(x,\Omega')<h\}$. 由上式得出 (5.2.3).

引理 5.2.2 如果 $u\in C^0(\Omega)$, 则对任意 $\Omega'\subset\subset\Omega$, 当 $h\to 0$ 时, u_h 在 Ω' 中一致收敛于 u, 即有

$$\sup_{\Omega'}|u_h-u|\to 0,\quad \text{当} h\to 0. \tag{5.2.4}$$

证 对 $\Omega'\subset\subset\Omega$, 记 $\text{dist}(\Omega',\partial\Omega)=2h_0$, 则 u 在 $B_{h_0}(\Omega')$ 上一致连续, 因而, 对任意 $\varepsilon>0$, 存在正数 $h_1\le h_0$ 使得

$$|u(x)-u(y)|<\varepsilon,\quad \text{当} x,y\in B_{h_0}(\Omega'),\quad |x-y|<h_1.$$

因此, 由平均函数的定义 (5.2.2) 得出: 当 $x\in\Omega'$, $h\le h_1$ 有

$$\begin{aligned}|u_h(x)-u(x)|&=\left|\int_{|y-x|<h}\rho_h(x-y)[u(y)-u(x)]dy\right|\\&\le\int_{|y-x|<h}\rho_h(x-y)|u(y)-u(x)|dy\\&\le\int_{|y-x|<h}\rho_h(x-y)\varepsilon dy=\varepsilon.\end{aligned}$$

从而有

$$\sup_{\Omega'}|u_h(x)-u(x)|<\varepsilon,\quad \text{当}\quad h\le h_1.$$

这就证明了 (5.2.4).

引理 5.2.3 设 $1\le p<\infty$.

(i) 如果 $u\in L^p_{\text{loc}}(\Omega)$, 则 $u_h\to u$ 在 $L^p_{\text{loc}}(\Omega)$ 中,

(ii) 如果 $u\in L^p(\Omega)$, 则 $u_h\to u$ 在 $L^p(\Omega)$ 中.

证 (i) 设 $\Omega'\subset\subset\Omega$, $2h_0=\text{dist}(\Omega',\partial\Omega)$, 于是 $\Omega''=B_{h_0}(\Omega')\subset\subset\Omega$. 由 $u\in L^p_{\text{loc}}(\Omega)$ 知道 $u\in L^p(\Omega'')$. 而 $C^0(\Omega'')$ 在 $L^p(\Omega'')$ 中稠密 (参阅文献 [9] 定理 2.13), 故对任意 $\varepsilon>0$ 存在 $v\in C^0(\Omega'')$ 使得

$$||u-v||_{p,\Omega''}<\varepsilon. \tag{5.2.5}$$

因 $\Omega' \subset\subset \Omega''$, 由引理 5.2.2 知道，存在 $h_1 \le h_0$ 使得

$$\sup_{\Omega'} |v_h - v| < \varepsilon, \quad \forall h \le h_1.$$

由此知

$$\|v_h - v\|_{p,\Omega'} = \left(\int_{\Omega'} |v_h - v|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon |\Omega|^{\frac{1}{p}}. \tag{5.2.6}$$

而由引理 5.2.1 及 (5.2.5) 有

$$\|u_h - v_h\|_{p,\Omega'} = \|(u-v)_h\|_{p,\Omega'} \le \|u - v\|_{p,\Omega''} < \varepsilon. \tag{5.2.7}$$

由 (5.2.5) $\sim$ (5.2.7) 得出

$$\|u_h - u\|_{p,\Omega'} \le \|u_h - v_h\|_{p,\Omega'} + \|v_h - v\|_{p,\Omega'} + \|v - u\|_{p,\Omega'}$$
$$< \varepsilon + \varepsilon|\Omega|^{\frac{1}{p}} + \varepsilon = (2 + |\Omega|^{\frac{1}{p}})\varepsilon.$$

这就证明了当 $h \to 0$ 时，u_h 在 $L^p(\Omega')$ 中收敛于 u, 而 $\Omega'(\Omega' \subset\subset \Omega)$ 是任意的，于是得知 u_h 在 $L^p_{\text{loc}}(\Omega)$ 中收敛于 u.

(ii) 取 $B = B_R(0) \supset\supset \Omega$, 在 $B\backslash\Omega$ 中令 $u = 0$, 则有 $u \in L^p_{loc}(B)$. 于是由 (i) 得出 u_h 在 $L^p(\Omega)$ 中收敛于 u.

5.3 弱 导 数

在 2.6 节中，对 $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ 曾经定义过广义导数 $D_iu(i = 1, 2, \cdots, n)$. 我们将以另外的方式介绍一般广义导数的概念，并将证明新的定义与 2.6 节的定义是等价的.

设 $k \ge 1$, $u \in C^k(\Omega)$, 则由欧拉公式 (1.3.9) 有

$$\int_\Omega D_i(u\varphi)dx = \int_{\partial\Omega} u\varphi\cos(\vec{n}, x_i)ds = 0, \quad \forall \varphi \in C_0^1(\Omega),$$

由此得

$$\int_\Omega \varphi D_i u dx = -\int_\Omega u D_i \varphi dx, \quad \forall \varphi \in C_0^1(\Omega), \tag{5.3.1}$$

此式称为 (多元函数) 的分部积分. 重复利用公式 (5.3.1) 得

$$\int_\Omega \varphi D_{ij}udx=-\int_\Omega D_juD_i\varphi dx=(-1)^2\int_\Omega uD_{ij}\varphi dx,\quad \forall\varphi\in C_0^2(\Omega).$$

用归纳法可证: 如果 $|\alpha|=k$, 则有

$$\int_\Omega \varphi D^\alpha udx=(-1)^k\int_\Omega uD^\alpha\varphi dx,\quad \forall\varphi\in C_0^k(\Omega).$$

我们利用此等式推广导数的概念如下.

定义 1 对 $u\in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$, 如果存在 $v\in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ 使得

$$\int_\Omega v\varphi dx=(-1)^{|\alpha|}\int_\Omega uD^\alpha\varphi dx,\quad \forall\varphi\in C_0^{|\alpha|}(\Omega),\tag{5.3.2}$$

则称 v 为 u 在 Ω 中的 α 阶 **弱导数** 或 **广义导数**, 并仍记为 $v=D^\alpha u$.

显然, 如果 u 在 Ω 中有连续导数 $D^\alpha u$, 则 $D^\alpha u$ 也是 u 在 Ω 中的弱导数.

例 1 设 $n\geq 2, B_1(0)\subset R^n$. 函数 $u(x)=\ln|x|$ 在 $B_1(0)$ 中没有连续导数, 但它在 $B_1(0)$ 中有弱导数 $D_iu=\dfrac{x_i}{|x|^2}$.

例 2 函数 $u(x)=|x|$ 在区间 $(-1,1)$ 中没有连续导数, 但它在 $(-1,1)$ 中有弱导数

$$v=Du=\begin{cases}1, & 当x>0,\\ -1, & 当x<0.\end{cases}$$

这里得到的函数 v 在 $(-1,1)$ 中没有弱导数.

为了说明弱导数定义的合理性, 我们需要证明弱导数的下面三个性质. 为此, 先将变分法基本引理推广如下.

广义变分法基本引理 如果 $u\in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ 满足

$$\int_\Omega u\varphi dx=0,\quad \forall\varphi\in C_0^\infty(\Omega),\tag{5.3.3}$$

则 $u=0$ a.e. 在 Ω 中.

证 设 $\Omega' \subset\subset \Omega$, 当 $h < \mathrm{dist}(\Omega', \partial\Omega)$ 时，对任意 $y \in \Omega'$, 取 $\varphi(x) = \rho_h(x-y) \in C_0^\infty(\Omega)$, 代入 (5.3.3) 得

$$u_h(y) = \int_\Omega u(x)\rho_h(x-y)dy = 0. \tag{5.3.4}$$

因 $u \in L^1(\Omega')$, 由引理 5.2.3(ii) 知道，u_h 在 $L^1(\Omega')$ 中收敛于 u, 从而集合 $\{u_h|h>0\}$ 有子序列 $\{u_{h_i}\}$, u_{h_i} 在 Ω' 中几乎处处收敛于 u(参阅文献 [9] 推论 2.11). 于是，由 (5.3.4) 知道：u 在 Ω' 中几乎处处为零；由于 Ω' 是满足 $\Omega' \subset\subset \Omega$ 的任意子区域，所以 u 在 Ω 中几乎处处为零. 证完.

由此引理及弱导数的定义易证弱导数的下列基本性质.

(i) 对指定的 α, 函数 $u \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ 的 α 阶弱导数 $D^\alpha u$ 最多只有一个；

(ii) 如果 $D^\alpha u$ 是 u 在 Ω 中的弱导数，$\Omega' \subset \Omega$, 则 $D^\alpha u$ 也是 u 在 Ω' 中的弱导数；

(iii) 如果 u 在 Ω 中有弱导数 $D^\alpha u = v$, v 在 Ω 中有弱导数 $D^\beta v = w$, 则 u 在 Ω 中有弱导数 $D^{\alpha+\beta} u = w$.

与普通连续导数不同，一个函数有某个高阶弱导数时，它却可能没有较低阶的弱导数.

例如在正方形 $\{(x,y) \in R^2 | \, |x| < 1, |y| < 1\}$ 中，函数

$$u(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{当} x > 0, \\ 0, & \text{当} x \le 0 \end{cases}$$

有弱导数 $D_{xy}u = D_y u = 0$, 但是不存在弱导数 $D_x u$.

引理 5.3.1 $u \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ 有弱导数 $D^\alpha u$, 则

$$D^\alpha u_h(x) = (D^\alpha u)_h(x), \quad \forall h < \mathrm{dist}(x, \partial\Omega). \tag{5.3.5}$$

证 对 (5.2.2) 定义的平均函数 u_h 进行微分，得

$$D^\alpha u_h(x) = \int_\Omega D_x^\alpha \rho_h(x-y)u(y)dy = (-1)^{|\alpha|}\int_\Omega D_y^\alpha \rho_h(x-y)u(y)dy. \tag{5.3.6}$$

而由 $\varphi(y)=\rho_h(x-y)\in C_0^\infty(\Omega)$ 及弱导数的定义 (5.3.2) 得

$$\int_\Omega D^\alpha u(y)\rho_h(x-y)dy=(-1)^{|\alpha|}\int_\Omega u(y)D_y^\alpha\rho_h(x-y)dy. \quad (5.3.7)$$

比较等式 (5.3.6) 及 (5.3.7), 再由平均函数的定义得

$$D^\alpha u_h(x)=\int_\Omega D^\alpha u(y)\rho_h(x-y)dy=(D^\alpha u)_h(x).$$

定理 5.3.2 设 $p\geq 1$. 函数 $u\in L_{\rm loc}^p(\Omega)$ 有弱导数 $D^\alpha u=v\in L_{\rm loc}^p(\Omega)$ 的充要条件是：存在整数 $k(|\alpha|\leq k\leq\infty)$ 及函数序列 $\{u_m\}\subset C^k(\Omega)$ 使得

$$\begin{cases} u_m\text{在}L_{\rm loc}^p(\Omega)\text{中收敛于}u(\text{当}m\to\infty), \\ D^\alpha u_m\text{在}L_{\rm loc}^p(\Omega)\text{中收敛于}v(\text{当}m\to\infty). \end{cases} \quad (5.3.8)$$

证 (i) 先证明条件是必要的. 由于 $u,D^\alpha u\in L_{\rm loc}^p(\Omega)$, 利用引理 5.2.3(i) 得出

$$\begin{cases} u_h\to u, & \text{在}L_{\rm loc}^p(\Omega)\text{中}, \\ (D^\alpha u)_h\to D^\alpha u, & \text{在}L_{\rm loc}^p(\Omega)\text{中}. \end{cases} \quad (\text{当}h\to 0) \quad (5.3.9)$$

命 $\Omega_m=\{x\in\Omega|{\rm dist}(x,\partial\Omega)>\frac{1}{2^m}\}$ $(m=1,2,\cdots)$, 则

$$\Omega_m\subset\subset\Omega_{m+1}\subset\subset\Omega\ (m=1,2,\cdots),\ \lim_{m\to\infty}\Omega_m=\Omega. \quad (5.3.10)$$

由 (5.3.9) 及 (5.3.10) 知道, 对任意 $m(m=1,2,\cdots)$, 存在正数 $h_m<\dfrac{1}{2^{m+1}}$ 使得

$$\|u_{h_m}-u\|_{p,\Omega_m}<\frac{1}{m},\ \|(D^\alpha u)_{h_m}-D^\alpha u\|_{p,\Omega_m}<\frac{1}{m}. \quad (5.3.11)$$

命

$$v_m=\begin{cases} u, & \text{在}\Omega_{m+1}\text{中}, \\ 0, & \text{在}R^n\backslash\Omega_{m+1}\text{中}, \end{cases} \qquad u_m=(v_m)_{h_m},$$

则

$$u_m = (v_m)_{h_m} \in C_0^\infty(R^n), \quad u_m = (v_m)_{h_m} = u_{h_m}, \text{ 在}\Omega_m\text{中}. \tag{5.3.12}$$

由此，利用引理 5.3.1 得出

$$D^\alpha u_m = D^\alpha u_{h_m} = (D^\alpha u)_{h_m}, \text{ 在}\Omega_m\text{中}. \tag{5.3.13}$$

由 (5.3.12),(5.3.13) 及 (5.3.11) 得出

$$u_m \in C^\infty(\bar{\Omega}), \quad ||u_m - u||_{p,\Omega_m} < \frac{1}{m}, \quad ||D^\alpha u_m - D^\alpha u||_{p,\Omega_m} < \frac{1}{m}. \tag{5.3.14}$$

任意取定 $\Omega' \subset\subset \Omega$, 存在 m_0 使得 $\Omega' \subset \Omega_{m_0}$. 于是，对任意的 $\varepsilon > 0$, 当 $m \geq \max(m_0, \frac{1}{\varepsilon})$ 时，由 (5.3.10) 及 (5.3.14) 有

$$||u_m - u||_{p,\Omega'} \leq ||u_m - u||_{p,\Omega_m} < \frac{1}{m} \leq \varepsilon,$$

$$||D^\alpha u_m - D^\alpha u||_{p,\Omega'} \leq ||D^\alpha u_m - D^\alpha u||_{p,\Omega_m} < \frac{1}{m} \leq \varepsilon.$$

这就证明了 $u_m \to u$ 在 Ω' 中， $D^\alpha u_m \to D^\alpha u$ 在 Ω' 中. 由于 Ω' 是任取的，因此，条件的必要性得到证明.

(ii) 再证明条件是充分的. 由于 $k \geq |\alpha|$ 且 $u_m \in C^k(\Omega)$, 由分部积分得出

$$\int_\Omega (D^\alpha u_m)\varphi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega u_m D^\alpha \varphi dx, \quad \forall \varphi \in C_0^k(\Omega). \tag{5.3.15}$$

因为 $u_m \to u$ 在 $L^p_{\text{loc}}(\Omega)$ 中 (当 $m \to \infty$), 所以有

$$\left| \int_\Omega (u_m - u) D^\alpha \varphi dx \right| \leq ||u_m - u||_{p,\text{supp}\varphi} ||D^\alpha \varphi||_{p',\Omega} \to 0 \quad (\text{当}m \to \infty).$$

由此得出

$$\int_\Omega u_m D^\alpha \varphi dx \to \int_\Omega u D^\alpha \varphi dx \ (\text{当}m \to \infty). \tag{5.3.16}$$

因为 $D^\alpha u_m \to v$ 在 $L^p_{\text{loc}}(\Omega)$ 中 (当 $m \to \infty$), 所以同理可证

$$\int_\Omega (D^\alpha u_m)\varphi dx \to \int_\Omega v\varphi dx\ (当 m \to \infty). \tag{5.3.17}$$

在 (5.3.15) 中，令 $m \to \infty$, 由 (5.3.16) 及 (5.3.17) 得出

$$\int_\Omega v\varphi dx = (-1)^\alpha \int_\Omega uD^\alpha\varphi dx,\quad \forall\varphi \in C_0^{|\alpha|}(\Omega).$$

故由弱导数的定义知 u 有弱导数 $D^\alpha u = v$.

定义 2 k 是正整数，以 $W^k(\Omega)$ 表示具有 1 至 k 阶所有弱导数的函数集合，即

$$W^k(\Omega) = \{u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)|u有弱导数D^\alpha u \ 当\ 1 \le |\alpha| \le k\}.$$

如果 $u \in C^{0,1}(\Omega)$, 则 u 在 Ω 中的任一直线段上绝对连续，因而 u 有几乎处处导数 $D_i(u)(i = 1, 2, \cdots, n)$, 可证这些几乎处处导数 D_iu 也是弱导数，从而有

$$C^{0,1}(\Omega) \subset W^1(\Omega). \tag{5.3.18}$$

许多古典微分的公式可以推广到弱微分, 例如, 由 $u, v \in W^1(\Omega)$, $\alpha, \beta \in R$ 得出

$$D(\alpha u + \beta v) = \alpha Du + \beta Dv. \tag{5.3.19}$$

由 $u, v \in W^1(\Omega), uv, (uD_iv + vD_iu) \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ 得出

$$D_i(uv) = uD_iv + vD_iu. \tag{5.3.20}$$

由 $u(x) \in W^1(\Omega), y = \psi(x) \in C^1(\Omega), \psi(\Omega) = \tilde{\Omega} \subset R^n, x = \psi^{-1}(y) \in C^1(\tilde{\Omega})$, $u(x) = u(\psi^{-1}(y)) = v(y) = v(\psi(x))$ 得出

$$D_iu(x) = \sum_{j=1}^n D_{y_j}v(y)\frac{\partial\psi_j}{\partial x_i}. \tag{5.3.21}$$

5.4 链 法 则

复合函数的微分法则称为 **链法则**. 本节讨论弱微分的链法则.

引理 5.4.1 如果 $f \in C^1(R), f' \in L^\infty(R), u \in W^1(\Omega)$, 则 $f \circ u = f(u) \in W^1(\Omega)$ 且 $D(f \circ u) = f'(u)Du$.

证 因为 $u \in W^1(\Omega)$, 由引理 5.3.2 知道, 存在序列 $\{u^m\} \subset C^1(\Omega)$ 使得

$$u^m \to u, \qquad 在L^1_{\text{loc}}(\Omega)上(m \to \infty), \tag{5.4.1}$$

$$Du^m \to Du, \quad 在L^1_{\text{loc}}(\Omega)上(m \to \infty). \tag{5.4.2}$$

取 Ω 的单调子区域 $\Omega_i (i = 1, 2, 3, \cdots)$ 使得

$$\Omega_1 \subset\subset \Omega_2 \subset\subset \cdots \subset\subset \Omega_k \subset\subset \Omega_{k+1} \subset\subset \cdots \subset\subset \Omega, \quad \lim_{k \to \infty} \Omega_k = \Omega.$$

例如, 可取 $\Omega_k = \left\{x \in \Omega | \text{dist}(x, \partial\Omega) > \dfrac{1}{k}\right\}$. 不妨设 Ω_1 不空. 由 (5.4.1) 知 $u^m \to u$ 在 $L^1(\Omega_1)$ 中, 故存在子序列 $\{u^{m1}\} \subset \{u^m\}$ 使得

$$u^{m1} \to u, \quad \text{a.e. 在 } \Omega_1 \text{ 中 } (当m \to \infty).$$

再由 (5.4.1) 知 $u^m \to u$ 在 $L^1(\Omega_2)$ 中, 又有子序列 $\{u^{m2}\} \subset \{u^{m1}\}$ 使得

$$u^{m2} \to u, \quad \text{a.e. 在 } \Omega_2 \text{ 中 } (当m \to \infty).$$

如此继续下去, 对任意 $k \geq 1$, 存在子序列

$$\{u^{mk}\} \subset \{u^{m,k-1}\} \subset \cdots \subset \{u^{m1}\} \subset \{u^m\}$$

使得

$$u^{mk} \to u, \quad \text{a.e. 在 } \Omega_k \text{ 中 } (当m \to \infty).$$

按对角线法则取子序列 $\{u^{mm}\} \subset \{u^m\}$, 并记 $u_m = u^{mm}$, 则对任意整数 $k \geq 1$, 有

$$u_m \to u, \quad \text{a.e.} \ \text{在} \ \Omega_k \ \text{中} \ (\text{当} m \to \infty). \tag{5.4.3}$$

由 $f \in C^1(R), u_m \in C^1(\Omega)$ 知 $f(u_m) \in C^1(\Omega)$. 而由 $f' \in L^\infty(R)$ 可设

$$|f'(u)| \leq M, \quad \forall u \in R, M\text{为正常数}.$$

因此，由中值公式

$$f(u_m) - f(u) = f'(u + \theta(u_m - u))(u_m - u), 0 \leq \theta \leq 1$$

得出

$$|f(u_m) - f(u)| \leq M|u_m - u|.$$

从而，由 (5.4.1) 及 $\{u_m\} \subset \{u^m\}$ 得出：对任意的 $\Omega' \subset\subset \Omega$ 有

$$\int_{\Omega'} |f(u_m) - f(u)| dx \leq M \int_{\Omega'} |u_m - u| dx \to 0 \quad (m \to \infty). \tag{5.4.4}$$

对取定的 Ω', 必存在 $k \geq 1$ 使得 $\Omega' \subset \Omega_k$. 因此

$$u_m \to u, \quad \text{a.e.} \ \text{在} \ \Omega' \ \text{中}.$$

再由 f' 的连续性得出

$$f'(u_m) \to f'(u), \quad \text{a.e.} \ \text{在} \ \Omega' \ \text{中},$$

于是，由 (5.4.2), 利用 Lebesgue 控制收敛定理得

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega'} |Df(u_m) - f'(u)Du| dx \\
&= \int_{\Omega'} |f'(u_m)(Du_m - Du) + [f'(u_m) - f'(u)]Du| dx \\
&\leq M \int_{\Omega'} |Du_m - Du| dx + \int_{\Omega'} |f'(u_m) - f'(u)||Du| dx \\
&\to 0 \ (m \to \infty).
\end{aligned} \tag{5.4.5}$$

由 (5.4.4), (5.4.5) 及 Ω 的任意性得出

$$f(u_m) \to f(u), \quad 在\ L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)\ 中\ (m \to \infty),$$

$$Df(u_m) \to f'(u)Du, \quad 在\ L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)\ 上\ (m \to \infty).$$

再由 $f(u_m) \in C^1(\Omega)$, 根据定理 5.3.2 得出

$$Df(u) = f'(u)Du.$$

证完.

对已知函数 u, 函数

$$u^+ = \max(u, 0), \quad u^- = \min(u, 0)$$

分别叫做 u 的 **正部** 及 **负部**. 显然有

$$u = u^+ + u^-, \quad |u| = u^+ - u^-.$$

引理 5.4.2 如果 $u \in W^1(\Omega)$, 则 $u^+, u^-, |u| \in W^1(\Omega)$, 且有

$$Du^+ = \begin{cases} Du, & 当\ u > 0, \\ 0, & 当\ u \leq 0; \end{cases}$$

$$Du^- = \begin{cases} 0, & 当\ u \geq 0, \\ Du, & 当\ u < 0; \end{cases}$$

$$D|u| = \begin{cases} Du, & 当\ u > 0, \\ 0, & 当\ u = 0, \\ -Du, & 当\ u < 0. \end{cases}$$

证 对 $\varepsilon > 0$, 应用引理 5.4.1 于函数

$$f_\varepsilon(u) = \begin{cases} \sqrt{u^2 + \varepsilon^2} - \varepsilon, & 当\ u > 0, \\ 0, & 当\ u \leq 0 \end{cases}$$

知道, $f_\varepsilon(u)$ 有弱导数

$$Df_\varepsilon(u)=\begin{cases}\dfrac{uDu}{\sqrt{u^2+\varepsilon^2}}, & \text{当 } u>0,\\ 0, & \text{当 } u\le 0.\end{cases}$$

由此得出

$$\int_\Omega f_\varepsilon(u)D\varphi dx=-\int_{u>0}\varphi\frac{uDu}{\sqrt{u^2+\varepsilon^2}}dx,\quad \forall\varphi\in C_0^1(\Omega).$$

在此式中令 $\varepsilon\to 0$, 由 Lebesgue 控制收敛定理得

$$\int_\Omega u^+D\varphi dx=-\int_{u>0}\varphi Dudx=-\int_\Omega\varphi Du^+dx,\quad \forall\varphi\in C_0^1(\Omega).$$

于是引理对 u^+ 已经证明. 利用等式

$$u^-=-(-u)^+,\quad |u|=u^+-u^-$$

可得其他结果.

引理 5.4.3 如果 $u\in W^1(\Omega)$ 且 u 在集合 D 上为常数, $D\subset\Omega$, 则 $Du=0$ a.e. 在 D 上.

证 设 $u=k$ 在 D 上 (k 为常数), 令 $v=u-k$, 则 $v=0$ 在 D 上. 由 $v=v^++v^-$ 及引理 5.4.2 得出 $Dv=Dv^++Dv^-=0$ 在 D 上. 因而有

$$Du=D(v+k)=Dv=0$$

在 D 上. 证完.

下面的定理是引理 5.4.1 ~ 5.4.3 的推广.

定理 5.4.4 设 $f\in C^0(R)$, f' 在 R 上分段连续 (即 f' 在 R 上有有限个第一类间断点), $f'\in L^\infty(R)$, 则当 $u\in W^1(\Omega)$ 时有 $f(u)\in W^1(\Omega)$ 且

$$D(f\circ u)=\begin{cases}f'(u)Du, & \text{当 } u\notin L,\\ 0, & \text{当 } u\in L,\end{cases}\tag{5.4.6}$$

其中 L 表示 f 的角点的集合.

证 对 f 的角点的个数用数学归纳法证明. 先设 f 有一个角点 u_1, 选取函数 $f_1, f_2 \in C^1(R)$ 满足 $f_1', f_2' \in L^\infty(R)$, 使得

$$\begin{cases} f_1(u) = f(u), & \text{当 } u \geq u_1, \\ f_2(u) = f(u), & \text{当 } u \leq u_1. \end{cases} \tag{5.4.7}$$

因为

$$f(u) = f_1((u-u_1)^+ + u_1) + f_2((u-u_1)^- + u_1) - f(u_1), \tag{5.4.8}$$

由引理 5.4.1 ~ 5.4.3 得出

$$\begin{aligned} Df(u) &= f_1'((u-u_1)^+ + u_1)D(u-u_1)^+ \\ &\quad + f_2'((u-u_1)^- + u_1)D(u-u_1)^- \\ &= \begin{cases} f'(u)Du, & \text{当 } u \neq u_1, \\ 0, & \text{当 } u = u_1. \end{cases} \end{aligned}$$

设函数有 $m-1$ 个角点时定理是真的. 现证明 f 有 m 个角点时定理也是真的. 设 f 的角点的集合为 $L = \{u_1, u_2, \cdots, u_m\}$, 不妨假定 $u_1 > u_2 > \cdots > u_m$. 选取函数 $f_1 \in C^1(R)$ 及 $f_2 \in C^0(R)$, f_2' 在 R 上分段连续, f_2 的角点的集合为 $L_1 = \{u_2, u_3, \cdots, u_m\}$, 且 $f_1', f_2' \in L^\infty(R)$, 使得 (5.4.7) 成立. 由 (5.4.8), 引理 5.4.1 ~ 5.4.3 及归纳假设得出

$$\begin{aligned} Df(u) &= f_1'((u-u_1)^+ + u_1)D(u-u_1)^+ + Df_2((u-u_1)^- + u_1) \\ &= \begin{cases} f'(u)Du, & \text{当 } u > u_1, \\ 0, & \text{当 } u = u_1, \\ f'(u)Du, & \text{当 } u_1 > u \notin L_1, \\ 0, & \text{当 } u \in L_1. \end{cases} \end{aligned}$$

由此得出等式 (5.4.6).

5.5 Sobolev 空间

设 k 为正整数，函数集合

$$W^{k,p}(\Omega)=\{u\in W^k(\Omega)|D^\alpha u\in L^p(\Omega),\quad \forall|\alpha|\le k\}$$

赋以范数

$$||u||_{k,p}=||u||_{k,p,\Omega}=\left(\int_\Omega\sum_{|\alpha|\le k}|D^\alpha u|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \tag{5.5.1}$$

后成为一个 Banach 空间，叫做 Sobolev 空间.

在空间 $W^{k,p}(\Omega)$ 中也可以取范数

$$||u||_{k,p}=||u||_{k,p,\Omega}=\sum_{|\alpha|\le k}||D^\alpha u||_{p,\Omega}\ , \tag{5.5.2}$$

它与范数 (5.5.1) 是等价的.

另一类 Sobolev 空间是

$$\begin{aligned}W_0^{k,p}(\Omega)&=C_0^k(\Omega)\text{ 在 }W^{k,p}(\Omega)\text{ 中的闭包}\\&=C_0^k(\Omega)\text{ 关于范数(5.5.1) 或 (5.5.2) 的完备化.}\end{aligned}$$

当 $p=2$ 时，又记 $W^{k,2}(\Omega)=H^k(\Omega)$, $W_0^{k,2}(\Omega)=H_0^k(\Omega)$, 它们关于内积

$$(u,v)_k=\int_\Omega\sum_{|\alpha|\le k}D^\alpha uD^\alpha vdx \tag{5.5.3}$$

还是 Hilbert 空间.

$W_{\rm loc}^{k,p}(\Omega)=\{u|u\in W^{k,p}(\Omega'),\ \forall\Omega'\subset\subset\Omega\}$ 称为局部 Sobolev 空间. 显然，Sobolev 空间与连续可微函数空间对任意的 $1\le k\le l\le\infty$, $1\le p<\infty$ 有下列包含关系：

$$\begin{array}{ccccc}C_0^l(\Omega)&\subset&C^l(\bar\Omega)&\subset&C^l(\Omega)\\ \bigcap&&\bigcap&&\bigcap\\ W_0^{k,p}(\Omega)&\subset&W^{k,p}(\Omega)&\subset&W_{\rm loc}^{k,p}(\Omega)\end{array}$$

而且 $C_0^l(\Omega)$ 是 $W_0^{k,p}(\Omega)$ 的稠密子集，$C^l(\Omega)$ 是 $W_{\rm loc}^{k,p}(\Omega)$ 的稠密子集. 但是 $C^1(\bar\Omega)$ 是否 $W^{k,p}(\Omega)$ 的稠密子集却依赖于区域 Ω 的几何性质.

如果区域 Ω 满足条件: 对任一 $x\in\partial\Omega$, 存在 x 的邻域 N_x 及非零向量 $y_x\in R^n$, 使得对所有 $z\in N_x\bigcap\bar\Omega$ 有 $z+ty_x\in\Omega,\forall t\in(0,1)$, 那么，称 Ω 满足线段条件.

定理 5.5.1 如果 Ω 满足线段条件, 且 $k\le l\le\infty, 1\le p<\infty$, 则 $C^l(\bar\Omega)$ 在 $W^{k,p}(\Omega)$ 中稠密.

证明见文献 [9] 定理 3.18.

对任意区域 Ω, 则有下面稠密性定理.

定理 5.5.2(Meyers 与 Serrin) 如果 $k\le l\le\infty$, $1\le p<\infty$, 则 $C^l(\Omega)\bigcap W^{k,p}(\Omega)$ 在 $W^{k,p}(\Omega)$ 中稠密.

证明参见文献 [9] 定理 3.16 或文献 [12] 定理 7.9.

空间 $W^{m,p}(\Omega)$ 是由 Sobolev S. L. 在文献 [22,23] 中引进的，它也曾被 Morrey C. B. [34] 及其他人研究过，并用过不同的记号 (如 $W_p^m, H^{m,p}, L_m^p$) 及不同的名字 (如 " Beppo Levi 空间") 来表示.

著者曾在文献 [5, 6, 25] 中将空间 $W^{m,p}$ 推广到各向异性.

设 k 为正整数，$p_{i_1\cdots i_k}\ge 1(i_1,\cdots,i_k=1,2,\cdots,n)$. 函数集合

$$\begin{aligned}&W^{k,(p_{i_1\cdots i_k})}(\Omega)\\=&W^k_{(p_{i_1\cdots i_k})}(\Omega)\\=&\{u\in L^1(\Omega)|D_{i_1}\cdots D_{i_k}u\in L^{p_{i_1\cdots i_k}}(\Omega),\\&i_1,\cdots,i_k=1,2,\cdots,n\}\end{aligned}$$

关于范数

$$\begin{aligned}&\|u\|_{k,(p_{i_1\cdots i_k})}=\|u\|_{k,(p_{i_1\cdots i_k}),\Omega}\\=&\|u\|_{1,\Omega}+\sum_{i_1,\cdots,i_k=1}^{n}\|D_{i_1}\cdots D_{i_k}u\|_{p_{i_1\cdots i_k},\Omega}\end{aligned}\tag{5.5.4}$$

成为一个 Banach 空间，叫做 **各向异性 Sobolev 空间**.

$$W_0^{k,(p_{i_1}\cdots i_k)}(\Omega) = \overset{\circ}{W}{}^k_{(p_{i_1}\cdots i_k)}(\Omega) = C_0^k(\Omega)\text{在}W^{k,(p_{i_1}\cdots i_k)}(\Omega)\text{中的闭包}$$

$$= C_0^k(\Omega)\text{关于范数(5.5.4)的完备化}$$

也叫做 **各向异性 Sobolev 空间**.

为了下一节建立 Sobolev 空间嵌入定理，我们需要引入 Holder 连续函数空间的概念.

设 $0 < \lambda \le 1$, 如果定义在 Ω 上的函数 $u(x)$ 满足条件

$$|u(x) - u(y)| \le K|x-y|^\lambda, \quad \forall x, y \in \bar{\Omega}, \tag{5.5.5}$$

其中 K 为正常数，即

$$[u]_\lambda = [u]_{\lambda,\Omega} = \sup_{\substack{x,y\in\bar{\Omega}\\ x\ne y}} \frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^\lambda} < \infty, \tag{5.5.6}$$

则称 $u(x)$ 在 Ω 中满足 **指数为 λ 的 Holder 条件** 或 $u(x)$ 在 Ω 中 **具有指数为 λ 的 Holder 连续性**. 当 $\lambda = 1$ 时，Holder 条件 (5.5.5) 即 (5.5.6) 又称为 **Lipschitz 条件**.

函数空间

$$C^{m,\lambda}(\bar{\Omega}) = \{u \in C^m(\bar{\Omega}) | [D^\alpha u]_{\lambda,\Omega} < \infty, \text{当}|\alpha| = m\} \tag{5.5.7}$$

关于范数

$$|u|_{m,\lambda} = |u|_{m,\lambda,\Omega} = |u|_{m,\Omega} + \sum_{|\alpha|=m} [D^\alpha u]_{\lambda,\Omega} \tag{5.5.8}$$

成为一个 Banach 空间.

设 $0 < \lambda_i \le 1 (i = 1, 2, \cdots, n), (\lambda_i) = (\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$. 如果定义在 Ω 上的函数 $u(x)$ 满足

$$[u]_{(\lambda_i)} = [u]_{(\lambda_i),\Omega} = \sup_{\substack{x,y\in\bar{\Omega}\\ x\ne y}} \frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^{(\lambda_i)}} < \infty, \tag{5.5.9}$$

其中

$$|x-y|^{(\lambda_i)}=|x_1-y_1|^{\lambda_1}+\cdots+|x_n-y_n|^{\lambda_n},$$

则称 $u(x)$ 在 Ω 中满足 **指数组 $(\lambda_i)=(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$ 的 Holder 条件** 或 **$u(x)$ 具有指数组 $(\lambda_i)=(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$ 的 Holder 连续性**.

函数空间

$$C^{0,(\lambda_i)}(\bar{\Omega})=\{u\in C^0(\bar{\Omega})|[u]_{(\lambda_i),\Omega}<\infty\} \tag{5.5.10}$$

关于范数

$$|u|_{0,(\lambda_i)}=|u|_{0,(\lambda_i),\Omega}=|u|_{0,\Omega}+[u]_{(\lambda_i),\Omega} \tag{5.5.11}$$

成为一个 Banach 空间.

当 $\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_n=\lambda$ 时，记 $(\lambda_i)=(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)=(\lambda)$, 由 Minkowski 不等式有

$$|x-y|^{\lambda}\le|x-y|^{(\lambda)}\le n^{1-\frac{\lambda}{2}}|x-y|^{\lambda},$$

此时, 由 (5.5.7) 定义的空间与 (5.5.10) 定义的空间相同, 即 $C^{0,\lambda}(\bar{\Omega})=C^{0,(\lambda)}(\bar{\Omega})$, 且当 $m=0$ 时的范数 (5.5.8) 及范数 (5.5.11) 是其中的等价范数.

5.6 嵌 入 定 理

设 X,Y 是两个 Banach 空间. 如果 $X\subset Y$, 且存在正常数 C, 使得

$$\|x\|_Y\le C\|x\|_X,\quad \forall x\in X,$$

即恒等算子 $I:x\to x$ 是 $X\to Y$ 的一个线性有界算子, 那么称 **X 嵌入到 Y**, 记为 $X\hookrightarrow Y$. 此时, 恒等算子 I 称为 $X\to Y$ 的 **嵌入算子**.

例如, 当整数 $k>m\ge 0$ 时, $C^k(\bar{\Omega})\hookrightarrow C^m(\bar{\Omega})$; $C^k(\bar{\Omega})$ 中的函数比 $C^m(\bar{\Omega})$ 中的函数有较高的光滑性.

又如，对 R^n 中的有界区域 Ω, 由 (5.1.8) 知道：当 $q>p$ 时，有 $L^q(\Omega)\subsetneq\!\!\!\to L^p(\Omega)$. 在一定意义上我们也可以说 $L^q(\Omega)$ 中的函数比 $L^p(\Omega)$ 中的函数有较高的光滑性. 例如，在 n 维单位球 $B=B_1(0)$ 中， $|x|^{-\alpha}\in L^q(B)$ 的充要条件是 $\alpha<\dfrac{n}{q}$, 因而 $|x|^{-\frac{n}{q}}\notin L^q(B)$; 但由 $q>p$ 知道 $|x|^{-\frac{n}{q}}\in L^p(B)$. 这就说明： $L^p(B)$ 中的函数 $|x|^{-\frac{n}{q}}$ 比 $L^q(B)$ 中所有形如 $|x|^\alpha$ 的函数有较高的奇异性. 因此，在一般意义上我们可以说： $L^q(B)$ 中的函数比 $L^p(B)$ 中的函数有较高的光滑性. 这样一来，函数的 L^p 可积性可以看成函数光滑性的一种标准： p 越大则 $L^p(\Omega)$ 中函数的光滑性越高 (即奇异性越低).

Sobolev 空间最重要的性质就是本节的一些嵌入定理，它说明：由弱可微函数及其导数的可积性可以判断函数本身的光滑性.

下面的嵌入定理说明： $W_0^{1,p}(\Omega)$ 中的函数实际上有比 L^p 可积更好的光滑性.

定理 5.6.1(Sobolev 嵌入定理) 设 Ω 是 R^n 中的有界区域, $1\le p<\infty$, 那么

$$W_0^{1,p}(\Omega)\subsetneq\!\!\!\to\begin{cases} L^q(\Omega), q=\begin{cases}\dfrac{np}{n-p}, & \text{当 } p<n,\\ \text{任意正数}, & \text{当 } p\ge n,\end{cases} \\ C^{0,\lambda}(\bar{\Omega}), \lambda=1-\dfrac{n}{p}, \qquad \text{当 } p>n,\end{cases}$$

$$||u||_q\le C||u||_{1,p},\quad \forall u\in W_0^{1,p}(\Omega),$$

其中 C 为常数，且当 $p<n$ 时， $C=C(n,p)$ 只与 n,p 有关；而当 $p\ge n$ 时， $C=C(n,p,q,\Omega)$ 与 n,p,q 及 Ω 有关.

$$|u|_{0,\lambda}\le C||u||_{1,p},\quad \forall u\in W_0^{1,p}(\Omega),$$

$$C=C(n,p,\Omega),\qquad \text{当} p>n.$$

由定理 5.6.1, 用数学归纳法容易推出关于空间 $W_0^{k,p}(\Omega)$ 的嵌入定理如下：

定理 5.6.2(Sobolev 嵌入定理) 设 Ω 是 R^n 中的有界区域, $1 \le p < \infty$, 对任意正整数 k 有

$$W_0^{k,p}(\Omega) \subsetneq\!\!\to \begin{cases} L^q(\Omega), q = \begin{cases} \dfrac{np}{n-kp}, & \text{当 } k < \dfrac{n}{p}, \\ \text{任意正数}, & \text{当 } k \ge \dfrac{n}{p}, \end{cases} \\ C^{m,\lambda}(\bar{\Omega}), \qquad\qquad\qquad\qquad \text{当 } k > \dfrac{n}{p}, \end{cases}$$

其中在 $k > \dfrac{n}{p}$ 的情形, 当 $k - \dfrac{n}{p}$ 不是整数时, m 与 λ 分别是 $k - \dfrac{n}{p}$ 的整数部分与小数部分, 即存在非负整数 m 使得

$$m < k - \frac{n}{p} < m + 1 \text{时有} \lambda = k - \frac{n}{p} - m;$$

而当 $k = \dfrac{n}{p} + m + 1 (m \ge 0)$ 是整数时, $\lambda \in (0,1)$ 是任意的.

注 1 如果 Ω 的边界 $\partial\Omega$ 具有适当的光滑性, 则定理 5.6.2 中将 $W_0^{k,p}(\Omega)$ 换成 $W^{k,p}(\Omega)$ 后也成立; 也就是说, 如果 Ω 具有 **锥性质**(即存在 n 维有限锥 V, 使得 Ω 中每一点 x 都是 Ω 中一个全等于 V 的锥 V_x 的顶点), 则对定理 5.6.2 中定义的 q 有 $W^{k,p}(\Omega) \subsetneq\!\!\to L^q(\Omega)$; 如果 Ω 具有 Lipschitz 连续的边界, 则当 $k > \dfrac{n}{p}$ 时, $W^{k,p}(\Omega) \subsetneq\!\!\to C^{m,\lambda}(\bar{\Omega})$ 对定理 5.6.2 中定义的 m 与 λ 成立. 而且可以举出反例证明: 当 $k < \dfrac{n}{p}$ 时, 对任意 $q > \dfrac{np}{n-kp}$ 均不可能有 $W^{k,p}(\Omega) \subsetneq\!\!\to L^q(\bar{\Omega})$, $p^* = \dfrac{np}{n-kp}$ 称为 Sobolev 嵌入定理的临界指数; 当 $k = \dfrac{n}{p}$ 时不可能有 $W^{k,p}(\Omega) \subsetneq\!\!\to L^\infty(\Omega)$; 当 $0 < k - \dfrac{n}{p} < 1$ 时, 对任意 $\lambda > k - \dfrac{n}{p}$ 不可能有 $W^{k,p}(\Omega) \subsetneq\!\!\to C^{0,\lambda}(\bar{\Omega})$, 而当 $k - \dfrac{n}{p} = 1$ 时不可能有 $W^{k,p}(\Omega) \subsetneq\!\!\to C^{0,1}(\bar{\Omega})$. 这就说明, 这个嵌入定理给出了最好的嵌入结果. 参阅文献 [7].

上述嵌入定理基本上归功于 Sobolev[22,23], 但当 $k < \dfrac{n}{p}$ 时, 他只得出 $W^{k,p}(\Omega) \subsetneq\!\!\to L^q(\Omega), \forall q < \dfrac{np}{n-kp}$, 而当 $k > \dfrac{n}{p}$ 时, 他只得

出 $W^{k,p}(\Omega) \subsetneq\!\!\to C^m(\bar{\Omega})$ (m 如定理所述). 关于 $k > \dfrac{n}{p}$ 时 $W^{k,p}(\Omega) \subsetneq\!\!\to C^{m,\lambda}(\bar{\Omega})$ 这一结果是由 Morrey[34] 首先证明的.

定理 5.6.1 是下列各向异性 Sobolev 空间 $W_0^{1,(p_i)}(\Omega)$ 的嵌入定理的特别情形.

定理 5.6.3 [6,25] 设 Ω 是 R^n 中的有界区域, $1 \le p_i < \infty (i = 1, \cdots, n)$, 那么

$$W_0^{1,(p_i)}(\Omega) \subsetneq\!\!\to \begin{cases} L^q(\Omega), & q = \begin{cases} \dfrac{n}{\sum\limits_i \dfrac{1}{p_i} - 1}, & \text{当 } \sum\limits_i \dfrac{1}{p_i} > 1, \\ \text{任意正数}, & \text{当 } \sum\limits_i \dfrac{1}{p_i} \le 1, \end{cases} \\ C^{0,(\lambda_i)}(\bar{\Omega}), & \lambda_i = \dfrac{1 - \sum\limits_j \dfrac{1}{p_j}}{1 - \sum\limits_j \dfrac{1}{p_j} + \dfrac{n}{p_i}}, \quad \text{当 } \sum\limits_i \dfrac{1}{p_i} < 1, \end{cases}$$

$$\|u\|_q \le C_1 \prod_{i=1}^n \|D_i u\|_{p_i}^{\frac{1}{n}} \le C_1 \|u\|_{1,(p_i)}, \quad \forall u \in W_0^{1,(p_i)}(\Omega), \tag{5.6.1}$$

$$|u|_{0,(\lambda_i)} \le C_2 \sum_{i=1}^n \|D_i u\|_{p_i} \le C_2 \|u\|_{1,(p_i)}, \quad \forall u \in W_0^{1,(p_i)}(\Omega),$$

$$\text{当} \sum_i \frac{1}{p_i} < 1 \tag{5.6.2}$$

其中 $C_1 = C_1(n, p_1, p_2, \cdots, p_n)$ 当 $\sum_i \frac{1}{p_i} > 1$, 而 $C_1 = C_1(n, p_1, p_2, \cdots, p_n, q, \Omega)$ 当 $\sum_i \frac{1}{p_i} \le 1$, $C_2 = C_2(n, p_1, p_2, \cdots, p_n, \Omega)$.

证 (i) 首先证明, 只需对任意 $u \in C_0^1(\Omega)$ 证明不等式 (5.6.1) 及 (5.6.2) 成立就够了. 例如, 设对任意 $u \in C_0^1(\Omega)$ 不等式 (5.6.1) 成立. 任取 $u \in W_0^{1,(p_i)}(\Omega)$, 存在 $\{u_m\} \in C_0^1(\Omega)$ 使得

$$\|u_m - u\|_1 + \sum_{i=1}^n \|D_i u_m - D_i u\|_{p_i} = \|u_m - u\|_{1,(p_i)} \to 0, \quad \text{当} m \to \infty. \tag{5.6.3}$$

由此得

$$\|u_m-u\|_1 \to 0,\ \ \|D_iu_m-D_iu\|_{p_i} \to 0(i=1,2,\cdots,n),\quad 当m\to\infty. \tag{5.6.4}$$

对 $u_m-u_l\in C_0^1(\Omega)$ 应用不等式 (5.6.1), 并由 (5.6.3) 得出

$$\|u_m-u_l\|_q \le C_1\|u_m-u_l\|_{1,(p_i)} \to 0 \quad 当\ \ m\to\infty, l\to\infty.$$

由此知道，存在 $v\in L^q(\Omega)$ 使得

$$\|u_m-v\|_q \to 0, \quad 当\ \ m\to\infty. \tag{5.6.5}$$

由此又有

$$\|u_m-v\|_1 \le |\Omega|^{1-\frac{1}{q}}\|u_m-v\|_q \to 0, \quad 当m\to\infty. \tag{5.6.6}$$

由 (5.6.4) 及 (5.6.6) 知 $u=v$ a.e. 在 Ω 中，再由 (5.6.5) 得

$$\|u_m-u\|_q \to 0, \quad 当m\to\infty. \tag{5.6.5$'$}$$

因对 $u_m\in C_0^1(\Omega)$ 有不等式 (5.6.1), 即

$$\|u_m\|_q \le C_1\prod_{i=1}^n\|D_iu_m\|_{p_i}^{\frac{1}{n}} \le C_1\|u_m\|_{1,(p_i)}.$$

在此式中令 $m\to\infty$, 由 $(5.6.5)'$, (5.6.4) 及 (5.6.3) 得出不等式 (5.6.1) 对 $u\in W_0^{1,(p_i)}(\Omega)$ 也成立.

(ii) 下列不等式的证明思想属于 Gagliardo[32]:

$$\int_\Omega\prod_{i=1}^n|u_i(x)|^{\frac{1}{n-1}}dx \le \left(\prod_{i=1}^n\int_\Omega|D_iu_i|dx\right)^{\frac{1}{n-1}}, \quad \forall u_i\in C_0^1(\Omega) \tag{5.6.7}$$

对 $u_i(x)\in C_0^1(\Omega)$, 在 $R^n\backslash\Omega$ 中令 $u_i=0$, 则由

$$u_i(x)=\int_{-\infty}^{x_i}D_iu_i(x_1,\cdots,x_{i-1},t,x_{i+1},\cdots,x_n)dt$$

得出

$$|u_i(x)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |D_i u_i(x_1, \cdots, x_{i-1}, t, x_{i+1}, \cdots, x_n)| dt$$
$$= \int |D_i u_i| dx_i = \tilde{u}_i(x_1, \cdots, x_{i-1}, x_{i+1}, \cdots, x_n). \tag{5.6.8}$$

上面及今后没有标明积分范围的积分中，都是省略了积分的上限 ∞ 及下限 $-\infty$. 我们用归纳法证明不等式

$$\int \prod_{i=1}^{n} |u_i|^{\frac{1}{n-1}} dx_1 \cdots dx_k$$
$$\leq \prod_{i=1}^{k} \left(\int |D_i u_i| dx_1 \cdots dx_k \right)^{\frac{1}{n-1}} \prod_{j=k+1}^{n} \left(\int |D_j u_j| dx_1 \cdots dx_k dx_j \right)^{\frac{1}{n-1}} \tag{5.6.9}$$

成立，从而不等式 (5.6.7) 成立.

由 (5.6.8) 并利用 Holder 不等式得出

$$\int \prod_{i=1}^{n} |u_i|^{\frac{1}{n-1}} dx_1 \leq \int \prod_{i=1}^{n} \tilde{u}_i^{\frac{1}{n-1}} dx_1$$
$$= \tilde{u}_1^{\frac{1}{n-1}} \int \prod_{i=2}^{n} \tilde{u}_i^{\frac{1}{n-1}} dx_1 \leq \tilde{u}_i^{\frac{1}{n-1}} \prod_{i=2}^{n} \left(\int \tilde{u}_i dx_1 \right)^{\frac{1}{n-1}}$$
$$= \left(\int |D_1 u_1| dx_1 \right)^{\frac{1}{n-1}} \prod_{i=2}^{n} \left(\int |D_i u_i| dx_i dx_1 \right)^{\frac{1}{n-1}}$$

这就证明了不等式 (5.6.9) 当 $k = 1$ 时成立.

设不等式 (5.6.9) 对 $1 \leq k \leq n-1$ 成立. 不等式 (5.6.9) 两端对 x_{k+1} 从 $-\infty$ 到 ∞ 积分，再利用 Holder 不等式得

$$\int \prod_{i=1}^{n} |u_i|^{\frac{1}{n-1}} dx_1 \cdots dx_k dx_{k+1}$$
$$\leq \left(\int |D_{k+1} u_{k+1}| dx_1 \cdots dx_k dx_{k+1} \right)^{\frac{1}{n-1}}$$

$$\times \int \prod_{i=1}^{k} \left(\int |D_i u_i| dx_1 \cdots dx_k \right)^{\frac{1}{n-1}}$$

$$\times \prod_{j=k+2}^{n} \left(\int |D_j u_j| dx_1 \cdots dx_k dx_j \right)^{\frac{1}{n-1}} dx_{k+1}$$

$$\leq \left(\int |D_{k+1} u_{k+1}| dx_1 \cdots dx_k dx_{k+1} \right)^{\frac{1}{n-1}}$$

$$\times \prod_{i=1}^{k} \left(\int |D_i u_i| dx_1 \cdots dx_k dx_{k+1} \right)^{\frac{1}{n-1}}$$

$$\times \prod_{j=k+1}^{n} \left(\int |D_j u_j| dx_1 \cdots dx_k dx_j dx_{k+1} \right)^{\frac{1}{n-1}}$$

$$= \prod_{i=1}^{k+1} \left(\int |D_i u_i| dx_1 \cdots dx_k dx_{k+1} \right)^{\frac{1}{n-1}}$$

$$\times \prod_{j=k+2}^{n} \left(\int |D_j u_j| dx_1 \cdots dx_k dx_{k+1} dx_j \right)^{\frac{1}{n-1}}.$$

这就证明了不等式 (5.6.9) 对 $k+1$ 也成立.

(iii) 设 $u(x) \in C_0^1(\Omega)$. 命 $u_i = |u|^{r_i} \in C_0^1(\Omega)(r_i > 1$ 待定) 代入 (5.6.7) 得出

$$\left(\int |u|^{\frac{\sum r_i}{n-1}} dx \right)^{n-1} \leq \prod_{i=1}^{n} \left\{ \int r_i |u|^{r_i - 1} |D_i u| dx \right\}$$

$$\leq \left(\prod_{i=1}^{n} r_i \right) \prod_{i=1}^{n} \left\{ \left(\int |u|^{(r_i-1)p_i'} dx \right)^{\frac{1}{p_i'}} \left(\int |D_i u|^{p_i} dx \right)^{\frac{1}{p_i}} \right\}. \tag{5.6.10}$$

命 $(r_i - 1)p_i{}' = s > 0$, 即对任意 $s > 0$ 取 $r_i = 1 + \dfrac{s}{p_i{}'}$. 再命 $q = \dfrac{\sum r_i}{n-1}$, $(\prod r_i)^{\frac{1}{n}} \leq \dfrac{\sum r_i}{n} = r$, 则 $(n-1)q = \sum r_i = nr =$

$n+s\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{p_i'}$. 于是，不等式 (5.6.10) 可写成

$$\|u\|_q^{nr}\le r^n\|u\|_s^{nr-n}\prod_{i=1}^{n}\|D_iu\|_{p_i},$$

由此得

$$\|u\|_q^{r}\le r\|u\|_s^{r-1}\prod_{i=1}^{n}\|D_iu\|_{p_i}^{\frac{1}{n}}. \tag{5.6.11}$$

(iv) 命 $s=q$, 则由 $(n-1)q=n+q\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{p_i'}$ 及 (5.6.11) 得出

$$\|u\|_q\le r\prod_{i=1}^{n}\|D_iu\|_{p_i}^{\frac{1}{n}},\quad q=\frac{n}{\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{p_i}-1}. \tag{5.6.12}$$

这就证明了当 $\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{p_i}>1$ 时，不等式 (5.6.1) 成立.

(v) 当 $\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{p_i}\le 1$ 时，$(n-1)q=n+s\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{p_i'}\ge n+s(n-1)$, $q\ge n'+s>s$, 于是 $\|u\|_s\le|\Omega|^{\frac{1}{s}-\frac{1}{q}}\|u\|_q$, 以此式代入 (5.6.11) 得出

$$\|u\|_q\le r|\Omega|^{(\frac{1}{s}-\frac{1}{q})(r-1)}\prod_{i=1}^{n}\|D_iu\|_{p_i}^{\frac{1}{n}},\quad 当q>n'.$$

注意当 $q>n'$ 时， s 是由 $n,p_1,\cdots,p_n$ 及 q 确定的正数，故上式说明不等式 (5.6.1) 对 $q>n'$ 成立. 由此易知不等式 (5.6.1) 对任意 $q>0$ 都成立.

(vi) 当 $\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{p_i}<1$ 时，我们先证明

$$|u|_0=\sup_{\Omega}|u|\le C_2\prod_{i=1}^{n}\|D_iu\|_{p_i}^{\frac{1}{n}}\le C_2\|u\|_{1,(p_i)},\quad \forall u\in C_0^1(\Omega). \tag{5.6.13}$$

又先对 $|\Omega|=1$ 的情形证明上列不等式. 命 $\tilde{u}=\dfrac{u}{\prod_{i=1}^{n}\|D_i u\|_{p_i}^{\frac{1}{n}}}$, 则由 (5.6.11) 有

$$\|\tilde{u}\|_{n'r}=\|\tilde{u}\|_q\le r^{\frac{1}{r}}\|\tilde{u}\|_s^{1-\frac{1}{r}}. \tag{5.6.14}$$

当 $\sum_{i=1}^{n}\dfrac{1}{p_i}<1$ 时, $\sum_{i=1}^{n}\dfrac{1}{p_i'}>n-1$, 命 $\delta=\dfrac{\sum\frac{1}{p_i'}}{n-1}>1$. 于是 $nr=\sum r_i=n+s\sum\dfrac{1}{p_i'}>s\sum\dfrac{1}{p_i'}=s(n-1)\delta$, $s<\dfrac{n'r}{\delta}$. 再由 $|\Omega|=1$ 知道

$$\|\tilde{u}\|_s\le\|\tilde{u}\|_{\frac{n'r}{\delta}}. \tag{5.6.15}$$

将 (5.6.15) 代入 (5.6.14) 得出

$$\|\tilde{u}\|_{n'r}\le r^{\frac{1}{r}}\|\tilde{u}\|_{\frac{n'r}{\delta}}^{1-\frac{1}{r}}. \tag{5.6.16}$$

由于 $s>0$ 是任意的, 故可任意取 $r>1$. 依次取 $r=\delta^m,\delta^{m-1},\cdots,\delta$, 由 (5.6.16) 得出

$$\begin{aligned}\|\tilde{u}\|_{n'\delta^m}&\le\delta^{m\delta^{-m}}\|\tilde{u}\|_{n'\delta^{m-1}}^{1-\delta^{-m}}\\&\le\delta^{m\delta^{-m}}\left(\delta^{(m-1)\delta^{-(m-1)}}\|\tilde{u}\|_{n'\delta^{m-2}}^{1-\delta^{-(m-1)}}\right)^{1-\delta^{-m}}\\&\le\cdots\le\delta^{\sum_1^m m\delta^{-m}}\|\tilde{u}\|_{n'}^{\prod_1^m(1-\delta^{-m})}.\end{aligned} \tag{5.6.17}$$

在 (5.6.7) 中命 $u_1=\cdots=u_m=u$, 并注意 $|\Omega|=1$ 得出

$$\|u\|_{n'}\le\prod_{i=1}^{n}\|D_i u\|_1^{\frac{1}{n}}\le\prod_{i=1}^{n}\|D_i u\|_{p_i}^{\frac{1}{n}}.$$

由此知 $\|\tilde{u}\|_{n'}\le 1$, 于是由 (5.6.17) 得出

$$\|\tilde{u}\|_{n'\delta^m}\le\delta^{\sum_1^m m\delta^{-m}}=C(\delta)=C_2.$$

命 $m\to\infty$, 由上式得出

$$\sup_{\Omega}|\tilde{u}|\le C_2\ \text{或}\ \sup_{\Omega}|u|\le C_2\prod_{i=1}^{n}\|D_i u\|_{p_i}^{\frac{1}{n}}\le C_2\|u\|_{1,(p_i)}. \tag{5.6.18}$$

为了去掉 $|\Omega| = 1$ 的限制，对任意的 Ω，作自变量变换 $x_i = |\Omega|^{\frac{1-\sum_j \frac{1}{p_j}}{n}+\frac{1}{p_i}} y_i (i = 1,2,\cdots,n)$，则 $dx = |\Omega| dy$. 设经变换后区域 Ω 变为 $\tilde{\Omega}$，则 $|\tilde{\Omega}| = 1$. 再命 $u(x) = \bar{u}(y)$, 则有

$$||D_i\bar{u}||_{p_i} = \left(\int_{\tilde{\Omega}} |D_i\bar{u}(y)|^{p_i} dy\right)^{\frac{1}{p_i}}$$

$$= \left(\int_{\Omega}\left(|D_i u||\Omega|^{\frac{1-\sum_j \frac{1}{p_j}}{n}+\frac{1}{p_i}}\right)^{p_i} \frac{dx}{|\Omega|}\right)^{\frac{1}{p_i}} = |\Omega|^{\frac{1-\sum_j \frac{1}{p_j}}{n}} ||D_i u||_{p_i}.$$

由此式及 (5.6.18) 得出

$$\sup_{\Omega}|u| = \sup_{\tilde{\Omega}}|\bar{u}| \le C_2 \prod_{i=1}^{n} ||D_i\bar{u}||_{p_i}^{\frac{1}{n}} \le C_2|\Omega|^{\frac{1-\sum_j \frac{1}{p_j}}{n}} \prod_{i=1}^{n} ||D_i u||_{p_i}^{\frac{1}{n}}.$$

此式就是所要证明的不等式 (5.6.13).

再证明

$$[u]_{(\lambda_i)} = \sup_{\substack{x,y\in\Omega \\ x\neq y}} \frac{|u(x)-u(y)|}{\sum_i |x_i - y_i|^{\lambda_i}} \le C_2 \sum_{i=1}^{n} ||D_i u||_{p_i}$$

$$\le C_2 ||u||_{1,(p_i)}, \quad \forall u \in C_0^1(\Omega). \tag{5.6.19}$$

对 $u \in C_0^1(\Omega)$, 令 $u = 0$ 在 $R^n \setminus \Omega$ 中. 任意取定 $x, y \in \Omega$，令

$$d = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^{\lambda_i} \ge |x_i - y_i|^{\lambda_i},$$

于是 $|x_i - y_i| \le d^{h_i}, h_i = \frac{1}{\lambda_i}, (i = 1,2,\cdots,n)$，因此，$x$ 与 y 必位于同一个棱长为 $d^{h_1},\cdots,d^{h_n}$ 的立方体中，故可设

$$x, y \in \Gamma_d = \{(z_1,\cdots,z_n) \in R^n | a_i \le z_i \le a_i + d^{h_i}, i = 1,2,\cdots,n\}.$$

不等式

$$|u(x) - u(y)| \le |u(x) - u(z)| + |u(z) - u(y)|$$

两端对 z 在 Γ_d 上积分得出

$$|\Gamma_d||u(x)-u(y)| \le \int_{\Gamma_d} |u(x)-u(z)|dz + \int_{\Gamma_d} |u(z)-u(y)|dz,$$

由此得出

$$|u(x)-u(y)| \le I_x + I_y, \tag{5.6.20}$$

其中

$$I_x = d^{-\sum h_i} \int_{\Gamma_d} |u(x)-u(z)|dz, \tag{5.6.21}$$

下面对 I_x 进行估计.

$$I_x = d^{-\sum h_i} \int_{\Gamma_d} \left| \int_0^1 \frac{\partial}{\partial t} u(x_1+t^{h_1}(z_1-x_1),\cdots,x_n+t^{h_n}(z_n-x_n))dt \right| dz$$

$$= d^{-\sum h_i} \int_{\Gamma_d} \left| \int_0^1 \sum_{i=1}^n D_i u(x_1+t^{h_1}(z_1-x_1),\right.$$

$$\left.\cdots,x_n+t^{h_n}(z_n-x_n))h_i t^{h_i-1}(z_i-x_i)dt \right| dz.$$

由上式，注意到 $|z_i - x_i| \le d^{h_i}$ 得出

$$I_x \le \sum_{i=1}^n h_i d^{h_i-\sum\limits_j h_j} \int_0^1 t^{h_i-1}dt \int_{a_1}^{a_1+d^{h_1}}$$

$$\cdots \int_{a_n}^{a_n+d^{h_n}} |D_i u(x_1+t^{h_1}(z_1-x_1),\cdots,x_n+t^{h_n}(z_n-x_n))|dz$$

对此式右端作变换 $x_i + t^{h_i}(z_i - x_i) = s_i$ $(i=1,2,\cdots,n)$ 后，再利用 Holder 不等式得出

$$I_x \le \sum_{i=1}^n h_i d^{h_i-\sum\limits_j h_j} \int_0^1 t^{h_i-1}dt \int_{x_1+t^{h_1}(a_1-x_1)}^{x_1+t^{h_1}(a_1-x_1)+t^{h_1}d^{h_1}}$$

$$\cdots \int_{x_n+t^{h_n}(a_n-x_n)}^{x_n+t^{h_n}(a_n-x_n)+t^{h_n}d^{h_n}} |D_i u(s)| \frac{ds}{\prod\limits_j t^{h_j}}$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n} h_i d^{h_i - \sum_j h_j} \int_0^1 t^{h_i - \sum_j h_j - 1} dt \left(\int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} |D_i u(s)|^{p_i} ds \right)^{\frac{1}{p_i}}$$

$$\times \left(\prod_{j=1}^{n} (t^{h_j} d^{h_j}) \right)^{\frac{1}{p_i'}}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} h_i d^{h_i - \frac{\sum_j h_j}{p_i}} \int_0^1 t^{h_i - \frac{\sum_j h_j}{p_i} - 1} dt \|D_i u\|_{p_i}. \tag{5.6.22}$$

取 $h_i (i = 1, 2, \cdots, n)$ 使得

$$h_i - \frac{\sum_j h_j}{p_i} = 1, \tag{5.6.23}$$

则 $(\sum_i h_i)(1 - \sum_i \frac{1}{p_i}) = n$. 于是

$$h_i = 1 + \frac{\sum_j h_j}{p_i} = \frac{1 - \sum_j \frac{1}{p_j} + \frac{n}{p_i}}{1 - \sum_j \frac{1}{p_j}}, \lambda_i = \frac{1}{h_i}. \tag{5.6.24}$$

由 (5.6.22) 及 (5.6.23) 得出

$$I_x \leq \sum_{i=1}^{n} h_i d \|D_i u\|_{p_i} \leq d (\max_i h_i) \sum_{i=1}^{n} \|D_i u\|_{p_i}. \tag{5.6.25}$$

同样对 I_y 进行估计得

$$I_y \leq d (\max_i h_i) \sum_{i=1}^{n} \|D_i u\|_{p_i}. \tag{5.6.26}$$

将 (5.6.25) 及 (5.6.26) 代入 (5.6.20) 得出

$$|u(x) - u(y)| \leq d C_2 \sum_{i=1}^{n} \|D_i u\|_{p_i}, \quad C_2 = 2 \max_i h_i. \tag{5.6.27}$$

由 (5.6.24),(5.6.27) 及 $d=\sum_i |x_i-y_i|^{\lambda_i}$ 得出不等式 (5.6.19). 合并不等式 (5.6.13) 及 (5.6.19) 得出不等式 (5.6.2) 对 $u\in C_0^1(\Omega)$ 成立. 证完.

注 2 由 (5.6.1) 得出 $\|u\|_1\le C\sum_{i=1}^n \|D_iu\|_{p_i}$, 于是有

$$\sum_{i=1}^n \|D_iu\|_{p_i}\le \|u\|_1+\sum_{i=1}^n \|D_iu\|_{p_i}\le (C+1)\sum_{i=1}^n \|D_iu\|_{p_i}$$

这就说明, 在空间 $W_0^{1,(p_i)}(\Omega)$ 中, 范数

$$\|u\|_{1,(p_i)}^n=\sum_{i=1}^n \|D_iu\|_{p_i}$$

与原先由 (5.5.4) 定义的范数

$$\|u\|_{1,(p_i)}=\|u\|_1+\sum_{i=1}^n \|D_iu\|_{p_i}$$

是等价的.

注 3 如果 Ω 具有立方体性质 (即存在正数 l , 使得 Ω 中每一点 x 都是含于 Ω 中的棱平行于坐标轴且棱长为 l 的正立方体 Γ_x 的顶点), 则当 $1<\sum_{i=1}^n \dfrac{1}{p_i}<1+\dfrac{n}{p_j}(j=1,2,\cdots,n)$ 时, 对定理 5.6.3 中的 q 有 $W^{1,(p_i)}(\Omega)\underset{\rightarrow}{\subsetneq} L^q(\Omega)$; 如果 Ω 具有一致正方体性质 (即存在正数 l 及 ε , 对任意 $x\in\Omega$, 只要 $y\in B_\varepsilon(x)$, 就存在含于 Ω 中的以 x 及 y 为顶点的棱平行于坐标轴且棱长为 l 的正方体 Γ_x 及 Γ_y, 使得 Γ_y 可由 Γ_x 平移 $y-x$ 得到: $\Gamma_y=y-x+\Gamma_x=\{y-x+z|z\in\Gamma_x\}\subset\Omega$), 则当 $\sum_{i=1}^n \frac{1}{p_i}<1$ 时, 有 $W^{1,(p_i)}(\Omega)\underset{\rightarrow}{\subsetneq} C^{0,(\lambda_i)}(\bar{\Omega})$, λ_i 如定理 5.6.3 所示 (参阅文献 [5] 及文献 [6]).

注 4 在二维正方形

$$Q=\left\{(x,y)|0<x<\frac{1}{2},\quad 0<y<\frac{1}{2}\right\}$$

中，对函数

$$u(x,y)=\frac{x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{3}}}{\ln x\ln y} \tag{5.6.28}$$

经计算得出

$$D_xu=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\left\{\frac{1}{\ln x}-\frac{2}{(\ln x)^2}\right\}\frac{y^{\frac{1}{3}}}{\ln y},$$

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega |D_xu|^2dxdy\\
&=\frac{1}{4}\int_0^{\frac{1}{2}}x^{-1}\left\{\frac{1}{(\ln x)^2}-\frac{4}{(\ln x)^3}+\frac{4}{(\ln x)^4}\right\}dx\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{y^{\frac{2}{3}}}{|\ln y|^2}dy\\
&=\frac{1}{4}\int_0^{\frac{1}{2}}\left\{\frac{d(\ln x)}{(\ln x)^2}-\frac{4d(\ln x)}{(\ln x)^3}+\frac{4d(\ln x)}{(\ln x)^4}\right\}\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{y^{\frac{5}{3}}d(\ln y)}{|\ln y|^2}\\
&\le\frac{1}{4}\left\{-\frac{1}{\ln x}+\frac{2}{(\ln x)^2}-\frac{4}{3(\ln x)^3}\right\}_0^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{5}{3}}\left(-\frac{1}{\ln y}\right)_0^{\frac{1}{2}}\\
&=\frac{1}{4}\left\{\frac{1}{\ln 2}-\frac{2}{(\ln 2)^2}+\frac{4}{3(\ln 2)^3}\right\}\frac{1}{2^{\frac{5}{3}}}\frac{1}{\ln 2}\\
&=2^{-\frac{11}{3}}(\ln 2)^{-2}\left\{1-2(\ln 2)^{-1}+\frac{4}{3}(\ln 2)^{-2}\right\}.
\end{aligned}$$

由此知 $D_xu\in L^2(\Omega)$．同法可证 $D_yu\in L^{\frac{3}{2}}(Q),u\in L^1(Q)$．因此 $u\in W^{1,(2,\frac{3}{2})}(Q)$．由注 3 得出的最好结果是 $u\in L^q(\Omega),q=\frac{2}{\frac{1}{2}+\frac{2}{3}-1}=12$．但如果只限于各向同性 Sobolev 空间，则只能视为 $u\in W^{1,\frac{3}{2}}(Q)$，从而由引理 5.6.2 的注 1 只能得出 $u\in L^6(Q)$.

注 5 对正方形

$$\Gamma=\{(x,y)||x|<1,|y|<1\},$$

函数

$$u(x,y)=|x|^{\frac{1}{2}}|y|^{\frac{2}{3}}\in C(\bar{\Gamma})\subset L^\infty(\Gamma)$$

由计算知道

$$D_x u = \frac{1}{2}|x|^{-\frac{1}{2}}(\text{sign}x)|y|^{\frac{2}{3}} \in L^p(\Gamma)$$

的充要条件是 $p<2$，而

$$D_y u = \frac{2}{3}|x|^{\frac{1}{2}}|y|^{-\frac{1}{3}}(\text{sign}y) \in L^p(\Gamma)$$

的充要条件是 $p<3$. 因此, 若视 $u \in W^{1,p}(\Gamma)$，则 $p<2=n$，由定理 5.6.2 的注 1 不能得出 u 的连续性. 但若视 $u \in W^{1,(p_1,p_2)}(\Gamma)$，则 $u \in W^{1,(p_1,p_2)}(\Gamma)$ 的充要条件是 $p_1<2$，$p_2<3$. 取 $p_1=\frac{11}{6}<2$，$p_2=\frac{11}{4}<3$, 则 $u \in W^{1,(\frac{11}{6},\frac{11}{4})}(\Gamma)$, 且

$$\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}=\frac{6}{11}+\frac{4}{11}<1$$

因而由注 3 知道函数 u 是 Holder 连续的.

注 4 与注 5 说明：各向异性 Sobolev 空间的嵌入定理能够比各向同性 Sobolev 空间的嵌入定理更准确地判断函数的光滑性.

用数学归纳法可以由定理 5.6.3 推出一般各向异性 Sobolev 空间 $W_0^{k,(p_{i_1\cdots i_k})}(\Omega)$ 及 $W^{k,(p_{i_1\cdots i_k})}(\Omega)$ 的嵌入定理，参见文献 [5, 6, 25].

5.7 嵌入算子的紧性

Kondrachov[24] 证明了：当 $kp<n$ 时对任意正数 $q<\frac{np}{n-kp}$，当 $kp \geq n$ 时对任意正数 q, 嵌入算子

$$W^{k,p}(\Omega) \to L^q(\Omega)$$

是紧算子. 这一结果推广到各向异性 Sobolev 空间 $W^{k,(p_{i_1\cdots i_k})}(\Omega)$ 也是正确的. 我们只给出空间 $W_0^{1,(p_i)}(\Omega)$ 的嵌入算子的紧性证明. 嵌入算子的紧性在近代分析，特别是在椭圆型偏微分方程理论中有许多重要的应用.

定理 5.7.1 设 Ω 是 R^n 中的有界区域， $1 \le p_i < \infty (i = 1, 2, \cdots, n)$. 那么

(i) 当 $\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{p_i} > 1$ 时对任意正数 $q < \frac{n}{\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{p_i} - 1}$, 当 $\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{p_i} \le 1$ 时对任意正数 q , 嵌入算子

$$W_0^{1,(p_i)}(\Omega) \to L^q(\Omega)$$

是紧算子.

(ii) 当 $\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{p_i} < 1$ 时，嵌入算子

$$W_0^{1,(p_i)}(\Omega) \to C^0(\bar{\Omega})$$

是紧算子.

证 (i) 当 $\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{p_i} > 1$ 时，记 $q_0 = \frac{n}{\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{p_i} - 1}$, 而当 $\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{p_i} \le 1$ 时，不妨设 $q \ge 1$, 并取 $q_0 > q$. 对 $W_0^{1,(p_i)}(\Omega)$ 中的任意有界集 A, 设

$$\|u\|_{1,(p_i)} \le K, \quad \forall u \in A.$$

利用嵌入不等式 (5.6.1) 得出

$$\|u\|_q \le C_1 \|u\|_{1,(p_i)} \le C_1 K, \quad \forall u \in A, \tag{5.7.1}$$

其中 $C_1 K$ 是与 $n, p_1, \cdots, p_k, q$ 及 Ω 有关而与 u 无关的常数. 因此，根据定理 2.1.2, 要证明集合 A 在 $L^q(\Omega)$ 中为列紧集，只需证明

$$\|u(x+h) - u(x)\|_q \le CK|h|^\alpha, \quad \forall u \in A, \tag{5.7.2}$$

其中常数 C 与 u 无关， $\alpha > 0$. 因此，由于 $C_0^1(\Omega)$ 在 $W_0^{1,(p_i)}(\Omega)$ 中稠密，而 $A \subset W_0^{1,(p_i)}(\Omega)$, 只需证明

$$\|u(x+h) - u(x)\|_q \le C|h|^\alpha \|u\|_{1,(p_i)}, \quad \forall u \in C_0^1(\Omega). \tag{5.7.3}$$

对 $u \in C_0^1(\Omega)$, 在 Ω 外令 $u=0$, 则

$$|u(x+h)-u(x)| = \left|\int_0^1 \frac{d}{dt}u(x+th)dt\right|$$

$$= \left|\int_0^1 \sum_{i=1}^n D_i u(x+th)h_i dt\right| \leq |h|\sum_{i=1}^n \int_0^1 |D_i u(x+th)|dt.$$

此式两端在 R^n 上积分并利用不等式 (5.1.8) 得出

$$\|u(x+h)-u(x)\|_1 \leq |h|\sum_{i=1}^n \int_0^1 \int_{R^n} |D_i u(x+th)|dxdt$$

$$\leq |h|\sum_{i=1}^n \|D_i u\|_1 \leq |h|\sum_{i=1}^n |\Omega|^{1-\frac{1}{p_i}}\|D_i u\|_{p_i}$$

$$\leq C_3|h|\ \|u\|_{1,(p_i)}, \tag{5.7.4}$$

其中 $C_3 = \max\limits_{1\leq i\leq n}|\Omega|^{1-\frac{1}{p_i}}$. 因 $1 \leq q < q_0$, 设

$$\frac{1}{q} = \alpha + \frac{1-\alpha}{q_0}, \quad 即 \quad \alpha = \frac{\frac{1}{q}-\frac{1}{q_0}}{1-\frac{1}{q_0}} > 0.$$

则由不等式 (5.1.9), (5.7.4) 及 (5.6.1) 得出

$$\|u(x+h)-u(x)\|_q$$

$$\leq \|u(x+h)-u(x)\|_1^\alpha \|u(x+h)-u(x)\|_{q_0}^{1-\alpha}$$

$$\leq (C_3|h|\ \|u\|_{1,(p_i)})^\alpha (2\|u\|_{q_0})^{1-\alpha}$$

$$\leq 2^{1-\alpha}C_3^\alpha |h|^\alpha \|u\|_{1,(p_i)}^\alpha (C_1\|u\|_{1,(p_i)})^{1-\alpha} = C|h|^\alpha \|u\|_{1,(p_i)}.$$

这就是不等式 (5.7.3).

(ii) 由嵌入不等式 (5.6.2) 及 Arzela-Ascoli 定理 2.1.1 得证.

5.8 差　商

在偏微分方程理论中,为了得出函数及其弱导数的弱可微性,通常需要对其差商进行研究. 在 R^n 中, 以 $e_1 = (1,0,\cdots,0)$, $\cdots,e_n = (0,0,\cdots,1)$ 分别表示在 $x_1,\cdots,x_n$ 方向的单位坐标向量. 对 R^n 中区域 Ω 上的一个函数 u, 函数

$$\Delta^h u(x) = \Delta_i^h u(x) = \frac{u(x+he_i)-u(x)}{h} \quad (h \neq 0) \tag{5.8.1}$$

称为 u 在 x_i 方向 (或 e_i 方向) 上的**差商**.

引理 5.8.1 如果 $u \in W^{1,p}(\Omega)$, 则对任意 $\Omega' \subset\subset \Omega$, 当 $0 < h < \operatorname{dist}(\Omega',\partial\Omega)$ 时, 有 $\Delta^h u \in L^p(\Omega')$, 而且

$$||\Delta^h u||_{p,\Omega'} \leq ||D_i u||_{p,\Omega}. \tag{5.8.2}$$

证 由定理 5.5.2, 可设 $u \in C^1(\Omega)\bigcap W^{1,p}(\Omega)$. 于是

$$\Delta^h u(x) = \frac{u(x+he_i)-u(x)}{h} = \frac{1}{h}\int_0^h D_i u(x+te_i)dt.$$

利用 Holder 不等式, 由上式得出

$$|\Delta^h u(x)|^p \leq \frac{1}{h}\int_0^h |D_i u(x+te_i)|^p dt.$$

因此有

$$\int_{\Omega'} |\Delta^h u(x)|^p dx \leq \frac{1}{h}\int_0^h \int_{\Omega'} |D_i u(x+te_i)|^p dxdt.$$

$$\leq \int_{\Omega} |D_i u(x)|^p dx.$$

引理 5.8.2 如果 $u \in L^p(\Omega)$, $1 < p < \infty$, 且存在正常数 K 及 h_0, 使得对任意 $\Omega' \subset\subset \Omega$ 有

$$||\Delta_i^h u||_{p,\Omega'} \leq K, \quad \forall 0 < h < \min\{h_0, \operatorname{dist}(\Omega',\partial\Omega)\}, \tag{5.8.3}$$

则弱导数 D_iu 存在，且

$$||D_iu||_{p,\Omega}\le K.$$

证 命 $\Omega_j=\{x\in\Omega|\mathrm{dist}(x,\partial\Omega)>\frac{1}{j}\}$, 则

$$\Omega_j\subset\subset\Omega_{j+1}\subset\Omega(j=1,2,\cdots),\text{且}\lim_{j\to\infty}\Omega_j=\Omega.$$

不妨设 Ω_1 不是空集. 在条件 (5.8.3) 中视 Ω' 为 Ω_1 得出

$$||\Delta_i^hu||_{p,\Omega_1}\le K,\quad\forall\,0<h<\min\{h_0,1).$$

因为 $L^p(\Omega_1)$ 中的有界集必为弱紧的 (参看附录 3 推论 1), 故存在正数序列 $\{h_{1m}\}$ 及 $v_1\in L^p(\Omega_1)$ 使得 ($\rightharpoonup$ 表弱收敛)

$$0<h_{1m}<\min\{h_0,1),h_{1m}\to 0,\text{当}m\to\infty,$$

$$\Delta_i^{h_{1m}}u\rightharpoonup v_1,\quad\text{在}L^p(\Omega_1)\text{ 中 (当}m\to\infty).$$

因此还有 (参看附录 3 引理 1)

$$||v_1||_{p,\Omega_1}\le\underline{\lim}_{m\to\infty}||\Delta_i^{h_{1m}}u||_{p,\Omega_1}\le K.$$

再在条件 (5.8.3) 中视 Ω' 为 Ω_2 得出

$$||\Delta_i^{h_{1m}}u||_{p,\Omega_2}\le K,\quad\forall h_{1m}<\min\{h_0,1/2).$$

由此，又存在子序列 $\{h_{2m}\}\subset\{h_{1m}\}$ 及 $v_2\in L^p(\Omega_2)$ 使得

$$0<h_{2m}<\min(h_0,1/2),h_{2m}\to 0,\quad\text{当}m\to\infty,$$

$$\Delta_i^{h_{2m}}u\rightharpoonup v_2,\quad\text{在}L^p(\Omega_2)\text{中}\quad(\text{当}m\to\infty),$$

$$||v_2||_{p,\Omega_2}\le K.$$

如此继续下去，对所有 $\Omega_j(j\ge 1)$, 存在子序列 $\{h_{jm}\subset\{h_{j-1,m}\}$ 及 $v_j\in L^p(\Omega_j)$ 使得

$$0<h_{jm}<\min\{h_0,1/j),h_{jm}\to 0,\text{当}\ m\to\infty,$$

$$\Delta_i^{h_{jm}} u \rightharpoonup v_j, \quad 在L^p(\Omega_j)中 \ (当m\to\infty),$$

$$\|v_j\|_{p,\Omega_j} \le K. \tag{5.8.4}$$

因此，按对角线法则取 $h_m = h_{mm}(m=1,2,\cdots)$, 则对任意 $\Omega_j(j=1,2,\cdots)$ 有

$$\Delta_i^{h_m} u \rightharpoonup v_j \quad 在L^p(\Omega_j)中, 当m\to\infty(h_m\to 0), j=1,2,\cdots \tag{5.8.5}$$

当 $l>j$ 时，由于 $\Omega_j \subset \Omega_l$ 及 (5.8.5) 得出

$$\Delta_i^{h_m} u \rightharpoonup v_l \quad 在L^p(\Omega_j)中, 当m\to\infty(h_m\to 0). \tag{5.8.6}$$

由 (5.8.5) 及 (5.8.6) 有

$$v_l = v_j \quad \text{a.e.}在\Omega_j中, \ 当l>j.$$

因此，等式

$$v = v_j \quad \text{a.e.}在\Omega_j中, \quad j=1,2,\cdots \tag{5.8.7}$$

在 Ω 中定义了一个函数 v, 且由 (5.8.4) 及 (5.8.5), 对任意 $\Omega_j(j=1,2,\cdots)$ 有

$$\|v\|_{p,\Omega_j} \le K, j=1,2,\cdots \tag{5.8.8}$$

$$\Delta_i^{h_m} u \rightharpoonup v \quad 在L^p(\Omega_j)中, 当m\to\infty(h_m\to 0), \quad j=1,2,\cdots \tag{5.8.9}$$

在 (5.8.8) 中令 $j\to\infty$ 得出

$$\|v\|_{p,\Omega} \le K. \tag{5.8.10}$$

再证明 v 就是 u 在 Ω 中的弱导数 $D_i u$. 任取 $\varphi \in C_0^1(\Omega)$. 必存在 $\Omega_j \supset\supset \text{supp}\varphi$. 视 $\varphi \in L^{p'}(\Omega_j)$, 由 (5.8.9) 得出

$$\int_{\Omega_j} (\Delta_i^{h_m} u)\varphi dx \to \int_{\Omega_j} v\varphi dx, \quad 当h_m\to 0. \tag{5.8.11}$$

当 h_m 充分小时有

$$\int_{\Omega_j} u(x+h_m e_i)\varphi(x)dx = \int_{\Omega_j} u(x)\varphi(x-h_m e_i)dx,$$

由此知

$$\int_{\Omega_j}\frac{u(x+h_me_i)-u(x)}{h_m}\varphi(x)dx=-\int_{\Omega_j}u(x)\frac{\varphi(x-h_me_i)-\varphi(x)}{-h_m}dx.$$

由差商的定义，上式可写成

$$\int_{\Omega_j}(\Delta_i^{h_m}u)\varphi dx=-\int_{\Omega_j}u\Delta_i^{-h_m}\varphi dx. \tag{5.8.12}$$

对所有 $x\in\Omega$ 都有

$$u(x)\Delta_i^{-h_m}\varphi(x)=u(x)\frac{\varphi(x-h_me_i)-\varphi(x)}{-h_m}\to u(x)D_i\varphi(x),\ \text{当}h_m\to 0.$$

于是，由 Lebesgue 控制收敛定理得

$$\int_{\Omega_j}u\Delta_i^{-h_m}\varphi dx\to\int_{\Omega_j}uD_i\varphi dx,\quad \text{当}h_m\to 0. \tag{5.8.13}$$

在 (5.8.12) 两端令 $h_m\to 0$, 将 (5.8.11) 及 (5.8.13) 代入得出

$$\int_{\Omega_j}v\varphi dx=-\int_{\Omega_j}uD_i\varphi dx.$$

由此式及 $\text{supp}\varphi\subset\subset\Omega_j\subset\Omega$ 知道

$$\int_{\Omega}v\varphi dx=-\int_{\Omega}uD_i\varphi dx.$$

由于 $\varphi\in C_0^1(\Omega)$ 的任意性，上式说明 u 在 Ω 中有弱导数 $D_iu=v$. 再由 (5.8.10) 得

$$||D_iu||_{p,\Omega}\le K.$$

5.9 Laplace 算子特征函数的正则性

在 3.5 节中，我们得出 Laplace 算子的特征值问题

$$-\Delta u=\lambda u,\qquad \text{在}\ \Omega\ \text{中}, \tag{5.9.1}$$

$$u = 0, \qquad \text{在 } \partial\Omega \text{ 上} \tag{5.9.2}$$

有特征值的无限序列

$$0 < \lambda_1 \le \lambda_2 \le \cdots \le \lambda_m \le \cdots \to \infty \tag{5.9.3}$$

及相应的 (广义) 特征函数

$$u_1, u_2, \cdots, u_m, \cdots, \tag{5.9.4}$$

且此特征函数序列组成 Sobolev 空间 $W_0^{1,2}(\Omega)$ 的基底.

作为本章前几节理论的直接应用,我们将证明特征函数 (5.9.4) 的正则性.

引理 5.9.1 如果 $u \in W^{1,2}(\Omega)$ 满足

$$\int_\Omega Du \cdot D\varphi dx = \lambda \int_\Omega u\varphi dx, \quad \forall \varphi \in W_0^{1,2}(\Omega), \tag{5.9.5}$$

则 $u \in W_{\text{loc}}^{2,2}(\Omega)$, 且满足

$$-\Delta u = \lambda u, \quad \text{a.e. 在 } \Omega \text{ 中}. \tag{5.9.6}$$

证 设 $\Omega' \subset\subset \Omega$, $\text{dist}(\Omega', \partial\Omega) = 2d$. 对任意满足条件

$$\text{supp}\varphi \subset \Omega^d = \{x \in \Omega | \text{dist}(x, \partial\Omega) > d\}$$

的 $\varphi \in W_0^{1,2}(\Omega)$, 当 $0 < h < d$ 时, 有

$$\Delta^{-h}\varphi = \Delta_i^{-h}\varphi(x) = \frac{\varphi(x - he_i) - \varphi(x)}{-h} \in W_0^{1,2}(\Omega).$$

故可在 (5.9.5) 中取 φ 为 $\Delta^{-h}\varphi$, 并利用 (5.8.12) 得出

$$\int_\Omega Du \cdot D(\Delta^{-h}\varphi)dx = \lambda \int_\Omega u\Delta^{-h}\varphi dx = -\lambda \int_\Omega (\Delta^h u)\varphi dx,$$

$$\text{当}\varphi \in W_0^{1,2}(\Omega), \text{supp}\varphi \subset \Omega^d, \quad 0 < h < d. \tag{5.9.7}$$

注意到 $D(\Delta^h\varphi)=\Delta^h(D\varphi)$, 并利用 (5.8.12) 得出

$$\int_\Omega Du\cdot D(\Delta^{-h}\varphi)dx=\int_\Omega Du\cdot\Delta^{-h}(D\varphi)dx.=-\int_\Omega \Delta^h(Du)\cdot D\varphi dx$$

以此式代入 (5.9.7) 得

$$\int_\Omega \Delta^h(Du)\cdot D\varphi dx=\lambda\int_\Omega(\Delta^h u)\varphi dx$$

$$\text{当}\varphi\in W_0^{1,2}(\Omega),\text{supp}\varphi\subset\Omega^d,0<h<d.\tag{5.9.8}$$

取截割函数

$$\mu(t)=\begin{cases}0, & \text{当 } 0\le t\le 1,\\ 5-12t+9t^2-2t^3, & \text{当 } 1\le t\le 2,\\ 1, & \text{当 } 2\le t.\end{cases}\tag{5.9.9}$$

易验证

$$\begin{cases}\mu(t)\in C^1([0,\infty)),\\ 0\le\mu(t)\le 1, \quad \forall t\in[0,\infty),\\ |\mu'(t)|\le\dfrac{3}{2},\quad\forall t\in[0,\infty).\end{cases}\tag{5.9.10}$$

对任意 $x\in R^n$, 我们来证明距离函数

$$d(x)=\text{dist}(x,\partial\Omega)=\inf_{z\in\partial\Omega}|z-x|\tag{5.9.11}$$

满足 Lipschitz 条件，且

$$|d(x)-d(y)|\le|x-y|,\quad\forall x,y\in R^n.\tag{5.9.12}$$

由定义 (5.9.11), 对任意 $\varepsilon>0$, 存在 $x_0\in\partial\Omega$ 使得

$$|x_0-x|<d(x)+\varepsilon.$$

由此知

$$d(y)\le|x_0-y|\le|x_0-x|+|x-y|<d(x)+\varepsilon+|x-y|.$$

因 ε 为任意正数，由上式得出

$$d(y) \le d(x) + |x-y|, \quad 即 \quad d(y) - d(x) \le |x-y|.$$

同理可得

$$d(x) - d(y) \le |x-y|.$$

从而 (5.9.12) 成立．即

$$d(x) \in C^{0,1}(R^n) \bigcap W^{1,\infty}(R^n). \tag{5.9.13}$$

对于函数

$$\eta(x) = \mu\left(\frac{d(x)}{d}\right), \tag{5.9.14}$$

根据引理 5.4.1, 并由 (5.9.10) 及 (5.9.13) 有

$$\begin{cases} \eta(x) \in W_0^{1,\infty}(\Omega), & \mathrm{supp}\eta \subset \Omega^d, \\ 0 \le \eta(x) \le 1, & \forall x \in \Omega, \\ \eta(x) = 1, & \forall x \in \Omega', \\ |D\eta(x)| \le \dfrac{3}{2d}, & \forall x \in \Omega. \end{cases} \tag{5.9.15}$$

因此，对于函数

$$\varphi = \eta^2 \Delta^h u, \quad 0 < h < d, \tag{5.9.16}$$

得出

$$\varphi \in W_0^{1,2}(\Omega), \quad \mathrm{supp}\varphi \subset \Omega^d. \tag{5.9.17}$$

利用公式 (5.3.20), 由 (5.9.16) 有

$$D\varphi = \eta^2 D(\Delta^h u) + 2\eta D\eta \Delta^h u = \eta^2 \Delta^h (Du) + 2\eta D\eta \Delta^h u. \tag{5.9.18}$$

因此，将 (5.9.16) 定义的 φ 代入 (5.9.8), 利用等式 (5.9.18) 得出

$$\begin{aligned} &\int_\Omega \eta^2 |\Delta^h(Du)|^2 dx + 2\int_\Omega \eta \Delta^h(Du) \cdot D\eta \Delta^h u dx \\ &= \lambda \int_\Omega \eta^2 |\Delta^h u|^2 dx. \end{aligned} \tag{5.9.19}$$

以不等式

$$-2\eta\Delta^h(Du)\cdot D\eta\Delta^h u \leq \frac{1}{2}\eta^2|\Delta^h(Du)|^2 + 2|D\eta\Delta^h u|^2$$

代入 (5.9.19) 得出

$$\begin{aligned}&\int_\Omega \eta^2|\Delta^h(Du)|^2 dx\\ \leq\ & \lambda\int_\Omega \eta^2|\Delta^h u|^2 dx + \int_\Omega \left(\frac{1}{2}\eta^2|\Delta^h(Du)|^2 dx + 2|D\eta\Delta^h u|^2\right) dx.\end{aligned}$$

因此有

$$\frac{1}{2}\int_\Omega \eta^2|\Delta^h(Du)|^2 dx \leq \lambda\int_\Omega \eta^2|\Delta^h u|^2 dx + 2\int_\Omega |D\eta|^2|\Delta^h u|^2 dx.$$

因为 $\lambda > 0$, 利用 (5.9.15) 及引理 5.8.1, 由上式得出: 当 $0 < h < d = \text{dist}(\Omega^d, \partial\Omega)$ 时有

$$\begin{aligned}||\Delta^h(Du)||^2_{2,\Omega'} &\leq \int_\Omega \eta^2|\Delta^h(Du)|^2 dx\\ &\leq 2\lambda\int_{\Omega^d}|\Delta^h u|^2 dx + \frac{9}{d^2}\int_{\Omega^d}|\Delta^h u|^2 dx\\ &= \left(2\lambda + \frac{9}{d^2}\right)||\Delta^h u||^2_{2,\Omega^d}\\ &\leq \left(2\lambda + \frac{9}{d^2}\right)||Du||^2_{2,\Omega} = K^2,\end{aligned} \tag{5.9.20}$$

其中

$$K = \left(2\lambda + \frac{9}{d^2}\right)^{\frac{1}{2}}||Du||_{2,\Omega}$$

是与 d(即与 Ω') 有关而与 h 无关的常数.

因为对任意 $\Omega'' \subset\subset \Omega'$ 及任意 $i, k(i, k = 1, 2, \cdots, n)$ 有

$$||\Delta_i^h(D_k u)||_{2,\Omega''} \leq ||\Delta^h(Du)||_{2,\Omega''} \leq ||\Delta^h(Du)||_{2,\Omega'},$$

从而由 (5.9.20) 得

$$\|\Delta_i^h(D_k u)\|_{2,\Omega''} \le K, \quad \forall\, 0<h<\min(d,\mathrm{dist}(\Omega'',\partial\Omega')).$$

因此，由引理 5.8.2 知道： $D_k u$ 在 Ω' 中有弱导数 $D_i(D_k u)$, 即 u 在 Ω' 中有弱导数 $D_{ik}u = D_i(D_k u)$, 且

$$\|D_{ik}u\|_{2,\Omega'} = \|D_i(D_k u)\|_{2,\Omega'} \le K.$$

这就证明了

$$u \in W^{2,2}(\Omega'), \quad \forall\, \Omega' \subset\subset \Omega,$$

即

$$u \in W^{2,2}_{\mathrm{loc}}(\Omega).$$

再证明 u 满足 (5.9.6). 因为 $D_{ii}u = D_i(D_i u)$ 是 $D_i u$ 的一阶弱导数，由弱导数的定义有

$$\int_\Omega \varphi D_{ii}u dx = -\int_\Omega D_i u D_i \varphi dx, \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

此式对 i 从 1 到 n 求和后，以 (5.9.5) 代入右端得出

$$\int_\Omega \varphi \Delta u dx = -\int_\Omega Du \cdot D\varphi dx = -\lambda \int_\Omega u\varphi dx, \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega),$$

即

$$\int_\Omega (\Delta u + \lambda u)\varphi dx = 0, \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

因此，根据 5.3 节的广义变分法基本引理知道 (5.9.6) 成立.

引理 5.9.2 如果 $u \in W^{1,2}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ 满足积分等式 (5.9.5), 则对任意整数 $k \ge 2$, 有 $u \in W^{k,2}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$.

证 因为 $u \in W^{1,2}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, 对任意 $\Omega' \subset\subset \Omega$, 选取 $\tilde{\Omega}$ 使 $\Omega' \subset\subset \tilde{\Omega} \subset\subset \Omega$, 则 $u \in W^{1,2}(\tilde{\Omega})$. 对任意 $\varphi \in W_0^{1,2}(\tilde{\Omega})$, 在 $\Omega \setminus \tilde{\Omega}$ 中令 $\varphi = 0$, 则 $\varphi \in W_0^{1,2}(\Omega)$, 由 (5.9.5) 得出

$$\int_{\tilde{\Omega}} Du \cdot D\varphi dx = \lambda \int_{\tilde{\Omega}} u\varphi dx, \quad \forall \varphi \in W_0^{1,2}(\tilde{\Omega}). \tag{5.9.21}$$

这就说明，引理 5.9.1 的条件当 Ω 为 $\tilde{\Omega}$ 时成立，因此，由引理 5.9.1 知道， $u \in W^{2,2}_{\text{loc}}(\tilde{\Omega})$. 但 $\Omega' \subset\subset \tilde{\Omega}$, 故 $u \in W^{2,2}(\Omega')$, 而 Ω' 又是 Ω 的任意内子域，于是得出 $u \in W^{2,2}_{\text{loc}}(\Omega)$.

以上证明了引理对 $k=2$ 成立.

对任意 $i(1 \le i \le n)$, 在 (5.9.5) 中以 $D_i\varphi$ 代替 φ 可得

$$\int_\Omega Du \cdot D(D_i\varphi)dx = \lambda \int_\Omega uD_i\varphi dx, \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega). \tag{5.9.22}$$

根据 $u \in W^{2,2}_{\text{loc}}(\Omega)$ 及弱导数的定义有

$$\begin{aligned}\int_\Omega D_ju \cdot D_j(D_i\varphi)dx &= \int_\Omega D_ju \cdot D_i(D_j\varphi)dx = -\int_\Omega D_i(D_ju)D_j\varphi dx \\ &= -\int_\Omega D_j(D_iu)D_j\varphi dx, \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega),\end{aligned} \tag{5.9.23}$$

$$\int_\Omega uD_i\varphi dx = -\int_\Omega \varphi D_iudx, \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega). \tag{5.9.24}$$

将 (5.9.23) 对 j 从 1 到 n 求和得出

$$\int_\Omega Du \cdot D(D_i\varphi)dx = -\int_\Omega D(D_iu) \cdot D\varphi dx, \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

将此式与 (5.9.24) 代入 (5.9.22) 得出

$$\int_\Omega D(D_iu) \cdot D\varphi dx = \lambda \int_\Omega \varphi D_iudx, \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

此式说明 $D_iu \in W^{1,2}_{\text{loc}}(\Omega)$ 满足引理 (视 D_iu 为 u) 的条件，而前面已经证明引理对 $k=2$ 成立，因而得出 $D_iu \in W^{2,2}_{\text{loc}}(\Omega)$. 由 $i(1 \le i \le n)$ 的任意性知道 $u \in W^{3,2}_{\text{loc}}(\Omega)$, 即引理对 $k=3$ 也成立. 用数学归纳法不难证明引理对任意 $k \ge 2$ 均成立.

定理 5.9.3 如果 $u \in W^{1,2}(\Omega)$ 满足积分等式 (5.9.5), 则 $u \in C^\infty(\Omega)$, 且

$$-\Delta u(x) = \lambda u(x), \quad \forall x \in \Omega. \tag{5.9.25}$$

证 我们来证明对任意整数 $m \geq 0$ 有 $u \in C^m(\Omega)$. 对任意 $\Omega' \subset\subset \Omega$, 存在具有 Lipschitz 连续边界的区域 Ω'' 使得 $\Omega' \subset \Omega'' \subset\subset \Omega$. 由引理 5.9.1 及引理 5.9.2 知道: 对 $k = m + \left[\frac{n}{2}\right] + 1$ 有 $u \in W^{k,2}(\Omega'')$, 这里 $\left[\frac{n}{2}\right]$ 表示 $\frac{n}{2}$ 的整数部分. 从而由嵌入定理 5.6.2 注 1 知道: 当 n 为奇数时 $u \in C^{m,\frac{1}{2}}(\overline{\Omega''})$, 当 n 为偶数时 $u \in C^{m,\lambda}(\overline{\Omega''})$, 这里 λ 为区间 $(0,1)$ 中任一值. 因为 $\Omega' \subset \overline{\Omega''}$, 所以 $u \in C^m(\overline{\Omega'})$, 再由 $\Omega'(\Omega' \subset\subset \Omega)$ 的任意性得出 $u \in C^m(\Omega)$. 由于 $m \geq 0$ 为任意整数, 这就证明了 $u \in C^\infty(\Omega)$.

再证明 u 满足 (5.9.25). 在引理 5.9.1 中已经证明 u 满足

$$\int_\Omega (\Delta u + \lambda u)\varphi dx = 0, \quad \forall\, \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

由于 $\Delta u+\lambda u \in C_0^\infty(\Omega)$, 根据变分法基本引理, 由上式得出 (5.9.25). 证完。

此定理说明: Laplace 算子的特征值问题 (5.9.1), (5.9.2) 的特征函数都是点点满足方程 (5.9.1) 的 $C^\infty(\Omega)$ 中的函数.

第六章　Banach 空间中的微分及微分方程

本章介绍以后两章要用到的关于非线性泛函分析的一些基本知识, 包含 Banach 空间中非线性泛函的微分性质, 涅梅茨基算子的有界性与连续性, 抽象函数的微分、积分及常微分方程.

6.1　泛函的 Fréchet 微分与临界点

定义 1　设 E 是 Banach 空间, $I: E \to R$ 是 E 上的泛函, $u \in E$. 如果存在 $A(u) \in E^*$(即 $A(u)$ 是 E 上的线性有界泛函), 使得

$$I(u+\varphi) = I(u) + \langle A(u), \varphi \rangle + \omega(u,\varphi), \tag{6.1.1}$$

其中 $\langle A(u), \varphi \rangle = A(u)\varphi$ 表示泛函 $A(u)$ 在 φ 处的值, $\omega(u,\varphi) = o(\|\varphi\|)$, 即

$$\lim_{\|\varphi\|} \frac{\|\omega(u,\varphi\|}{\|\varphi\|} = 0, \tag{6.1.2}$$

则称泛函 I 在 u 处 **Fréchet 可微**, $A(u)$ 称为 I 在 u 处的 **Fréchet 导数**, 记为 $A(u) = I'(u)$, $A(u)\varphi = I'(u)\varphi$ 称为 I 在 u 处 **Fréchet 微分**. 于是 (6.1.1) 可以写成

$$I(u+\varphi) = I(u) + \langle I'(u), \varphi \rangle + o(\|\varphi\|), \tag{6.1.3}$$

如果 I 对任意 u 都是 Fréchet 可微的, 则记为 $I \in C^1(E,R)$.

例 1　当 $f \in L^2(\Omega)$ 时, $E = W_0^{1,2}(\Omega)$ 上的泛函

$$I(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |Du|^2 dx - \int_\Omega f u dx \tag{6.1.4}$$

满足: 对任意 $u, \varphi \in E$ 有

$$\begin{aligned} I(u+\varphi) &= \frac{1}{2}\int_\Omega |Du + D\varphi|^2 dx - \int_\Omega f(u+\varphi) dx \\ &= I(u) + \int_\Omega (Du \cdot D\varphi - f\varphi) dx + \int_\Omega |D\varphi|^2 dx. \end{aligned}$$

将此式与 (6.1.1) 对照，有

$$\omega(u,\varphi)=\frac{1}{2}\int_\Omega |D\varphi|^2dx=\frac{1}{2}||\varphi||_E^2,$$

$$\langle A(u),\varphi\rangle=\int_\Omega (Du\cdot D\varphi-f\varphi)dx. \tag{6.1.5}$$

显然， $\omega(u,\varphi)$ 满足条件 (6.1.2), $A(u)$ 是 E 上的线性泛函. 由 (6.1.5) 及 Friedrichs 不等式得出

$$\begin{aligned}\langle A(u),\varphi\rangle &\le ||Du||_2||D\varphi||_2+||f||_2||\varphi||_2\\ &\le ||Du||_2||D\varphi||_2+||f||_2C||\varphi||_2\\ &=(||u||_E+C||f||_2)||\varphi||_E.\end{aligned}$$

此式说明 $A(u)$ 是 E 上的有界泛函. 从而根据定义 1 知道：对任意 $u\in E$, 泛函 I 在 u 处都是 Fréchet 可微的, 即 $I\in C^1(E,R)$, 且 I 在 u 处的 Fréchet 导数 $I'(u)=A(u)$ 由下式定义：

$$\langle I'(u),\varphi\rangle=\int_\Omega (Du\cdot D\varphi-f\varphi)dx \tag{6.1.6}$$

由 (6.1.6) 知道： Poisson 方程 Dirichlet 问题

$$\begin{cases}-\Delta u=f, & 在\ \Omega\ 中,\\ u=0, & 在\ \partial\Omega\ 上\end{cases}$$

在 $E=W_0^{1,2}(\Omega)$ 中的弱解 u 就是满足

$$\langle I'(u),\varphi\rangle=0,\quad \forall\varphi\in W_0^{1,2}(\Omega)$$

的函数 $u\in E$, 或者说， u 是

$$I'(u)=0$$

的解.

定义 2 设 E 是 Banach 空间， $I \in \mathcal{C}^1(E, R)$. 如果 $u \in E$ 满足

$$I'(u) = 0, \tag{6.1.7}$$

即

$$\langle I'(u), \varphi \rangle = 0, \quad \forall \varphi \in E, \tag{6.1.8}$$

则称 u 为泛函 I 的 **临界点**, 对应于临界点 u 的值 $I(u)$ 称为 I 的 **临界值**.

例 1 说明，线性椭圆方程 Dirichlet 问题的弱解就是相应泛函的临界点，下面的例 2 进一步说明，非线性椭圆方程 Dirichlet 问题的弱解也是相应泛函的临界点.

例 2 设 Ω 是 $n(n \leq 6)$ 维有界区域. 对 $E = W_0^{1,2}(\Omega)$ 上的泛函

$$J(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |Du|^2 dx - \frac{1}{3}\int_\Omega u^3 dx \tag{6.1.9}$$

及 $u \in E$, 当 $\varphi \in E$ 时有

$$\begin{aligned}
J(u+\varphi) &= \frac{1}{2}\int_\Omega |Du + D\varphi|^2 dx - \frac{1}{3}\int_\Omega (u+\varphi)^3 dx \\
&= J(u) + \int_\Omega (Du \cdot D\varphi - u^2\varphi) dx \\
&\quad + \int_\Omega \left(\frac{1}{2}|D\varphi|^2 - u\varphi^2 - \frac{1}{3}\varphi^3\right) dx.
\end{aligned}$$

此式与 (6.1.1) 比较有

$$\langle A(u), \varphi \rangle = \int_\Omega (Du \cdot D\varphi - u^2\varphi) dx, \tag{6.1.10}$$

$$\omega(u, \varphi) = \int_\Omega \left(\frac{1}{2}|D\varphi|^2 - u\varphi^2 - \frac{1}{3}\varphi^3\right) dx. \tag{6.1.11}$$

因 Ω 是 $n(n \leq 6)$ 维有界区域，由 Sobolev 空间嵌入定理 5.6.1 知道：当 $1 \leq n \leq 2$ 时有 $W_0^{1,2}(\Omega) \subsetneq L^3(\Omega)$; 当 $3 \leq n \leq 6$ 时，由于

$3 \le \dfrac{2n}{n-2}$ 仍有

$$W_0^{1,2}(\Omega) \overset{\subseteq}{\to} L^3(\Omega).$$

因此，存在常数 C 使得

$$\|u\|_3 \le C\|u\|_E, \quad \forall u \in E. \tag{6.1.12}$$

利用 Holder 不等式及 (6.1.12), 由 (6.1.10) 得出

$$\begin{aligned}
|\langle A(u), \varphi\rangle| &\le \|Du\|_2\|D\varphi\|_2 + \left(\int_\Omega |u|^3 dx\right)^{\frac{2}{3}} \left(\int_\Omega |\varphi|^3 dx\right)^{\frac{1}{3}} \\
&\le \|u\|_E\|\varphi\|_E + (C\|u\|_E)^2 C\|\varphi\|_E \\
&= (\|u\|_E + C^3\|u\|_E^2)\|\varphi\|_E.
\end{aligned}$$

由此知 $A(u) \in E^*$. 再利用 Holder 不等式及 (6.1.12), 由 (6.1.11) 又得出

$$\begin{aligned}
|\omega(u,\varphi)| &\le \frac{1}{2}\|D\varphi\|_2^2 + \|u\|_3\|\varphi\|_3^2 + \frac{1}{3}\|\varphi\|_3^2 \\
&\le \frac{1}{2}\|\varphi\|_E^2 + C\|u\|_E(C\|\varphi\|)^2 + \frac{1}{3}(C\|\varphi\|)^3 \\
&\le \left(\frac{1}{2} + C^3\|u\|_E + \frac{1}{3}C^3\|\varphi\|_E\right)\|\varphi\|_E^2,
\end{aligned}$$

由此易知 $\omega(u,\varphi)$ 满足条件 (6.1.2). 因此，根据定义 1 有 $A(u) = J'(u)$, $J \in C^1(E,R)$ 且

$$\langle J'(u), \varphi\rangle = \int_\Omega (Du \cdot D\varphi - u^2\varphi)dx, \quad \forall \varphi \in E. \tag{6.1.13}$$

设 $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ 是泛函 J 的临界点，即 $J'(u) = 0$, 或

$$\langle J'(u), \varphi\rangle = \int_\Omega (Du \cdot D\varphi - u^2\varphi)dx = 0, \quad \forall \varphi \in W_0^{1,2}(\Omega). \tag{6.1.14}$$

如果 $u \in C^2(\Omega)$, 则由 (6.1.14) 有

$$\int_\Omega (Du \cdot D\varphi - u^2\varphi)dx = 0, \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega). \tag{6.1.15}$$

由此推出

$$\int_{\Omega}(-\Delta u-u^2)\varphi dx=0,\quad \forall\varphi\in C_0^{\infty}(\Omega).$$

根据变分法基本引理，由上式知道 $-\Delta u-u^2=0$, 即 u 满足非线性微分方程

$$-\Delta u=u^2.$$

因此，一般把 $W_0^{1,2}(\Omega)$ 上泛函 J 的临界点 u, 即满足积分等式 (6.1.14) 或 (6.1.15) 的函数 $u\in W_0^{1,2}(\Omega)$ 称为非线性微分方程 Dirichlet 问题

$$\begin{cases}-\Delta u=u^2, & 在\Omega中,\\ u=0, & 在\partial\Omega上\end{cases}$$

的 **弱解 (广义解)**.

上面两个例子说明，研究微分方程边值问题的弱解可以化为研究相应泛函的临界点，由于线性微分方程边值问题所对应的泛函是有下界的 (参阅定理 3.6.1 的证明), 它的弱解即对应泛函的临界点，可以通过求泛函的极小值而得出，这就是本书第一部分讲述的古典变分法. 但是，对非线性微分方程边值问题，它所对应的泛函可能既无上界也无下界. 例如，在例 2 中，任意取定一个函数 $u\in W_0^{1,2}(\Omega)$, 满足 $u\not\equiv 0$, $u\geq 0$ 在 Ω 中，因为对任意 $t\in R$ 均有 $tu\in W_0^{1,2}(\Omega)$, 而由 (6.1.9) 得出

$$J(tu)=\frac{t^2}{2}\int_{\Omega}|Du|^2dx-\frac{t^3}{3}\int_{\Omega}u^3dx\to{}^{-}_{+}\infty,\ 当\ t\to{}^{+}_{-}\infty.$$

即 $J(u)$ 在 $W_0^{1,2}(\Omega)$ 中既无上界也无下界. 因此，一般说来，对非线性微分方程边值问题，不能用古典变分法 (求泛函极值) 来判定相应泛函的临界点，而是需要全新的理论和方法来研究相应泛函的临界点，这就是下面两章要讲述的 **临界点理论** 或称为 **大范围变分法**.

6.2 涅梅茨基 (Nemytski) 算子

如上节例 2 所示，非线形椭圆方程 Dirichlet 问题

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x,u), & \text{在 } \Omega \text{ 中}, \\ u = 0, & \text{在 } \partial\Omega \text{ 上}, \end{cases} \tag{6.2.1}$$

在 $W_0^{1,2}(\Omega)$ 中的弱解 u 是泛函

$$I(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |Du|^2 dx - \int_\Omega F(x,u)dx \tag{6.2.2}$$

在 $W_0^{1,2}(\Omega)$ 中的临界点，其中

$$F(x,u) = \int_0^u f(x,t)dt. \tag{6.2.3}$$

因此，为了研究非线性椭圆方程 Dirichlet 问题，需要讨论非线性算子 $A: u \to F(x,u)$, 它是线性算子 $A: u \to fu$ 的推广.

定义 设 $F(x,u_1,\cdots,u_m)$ 是定义在 $\Omega \times R^m$ 上的函数. 如果 F 满足下列两个条件，则称 F 在 $\Omega \times R^m$ 上满足 **Carathéodory 条件**.

(i) 对几乎所有的 $x \in \Omega$, $F(x,u_1,\cdots,u_m)$ 是 $(u_1,\cdots,u_m)$ 的连续函数;

(ii) 对所有取定的 $(u_1,\cdots,u_m) \in R^m$, $F(x,u_1,\cdots,u_m)$ 对 x 是 Ω 上的可测函数.

当 $F(x,u_1,\cdots,u_m)$ 满足 Carathéodory 条件时，如果 $u_1(x),\cdots,u_m(x)$ 都是 Ω 上的可测函数，则 $F(x,u_1(x),\cdots,u_m(x))$ 也是 Ω 上的可测函数 (证明参见文献 [8]).

映射

$$A: (u_1(x),\cdots,u_m(x)) \to F(x,u_1(x),\cdots,u_m(x))$$

称为 **涅梅茨基算子**(也称 Carathéodory 算子).

定理 6.2.1 设 $p \geq 1$, $r \geq 1$, 函数 F 在 $\Omega \times R$ 上满足 Carathéodory 条件及不等式

$$|F(x,u)| \leq a(x) + b|u|^{\frac{p}{r}}, \quad \forall (x,u) \in \Omega \times R, \tag{6.2.4}$$

其中 $a(x) \in L^r(\Omega)$, $b > o$, 则涅梅茨基算子

$$A : u(x) \to F(x, u(x)) \tag{6.2.5}$$

是 $L^p(\Omega) \to L^r(\Omega)$ 的有界连续算子.

证 利用 Minkowski 不等式, 由 (6.2.4) 得出

$$\begin{aligned} ||F(x,u(x))||_r &\leq ||a(x) + b|u(x)|^{\frac{p}{r}}||_r \\ &\leq ||a(x)||_r + b||u(x)||_p^{\frac{p}{r}}, \end{aligned}$$

即由 (6.2.5) 定义的算子是 $L^p(\Omega) \to L^r(\Omega)$ 的有界算子.

再证明算子 A 的连续性. 用反证法. 设算子 A 不连续, 则存在 $\epsilon > 0$, $u_0 \in L^p(\Omega)$ 及序列 $\{u_k\} \subset L^p(\Omega)$, 使得

$$||u_k - u_0||_p \to 0, \quad \text{当 } k \to \infty. \tag{6.2.6}$$

$$||F(x,u_k(x)) - F(x,u_0(x))||_r \geq \epsilon, \quad \forall k \geq 1. \tag{6.2.7}$$

由 (6.2.6), 存在 $\{u_k\}$ 的子序列, 此子序列仍记为 $\{u_k\}$, 使得

$$u_k \to u_0, \quad \text{a.e.} \quad \text{在 } \Omega \text{ 中}, \quad \text{当 } k \to \infty. \tag{6.2.8}$$

命

$$\begin{aligned} f_k(x) = F(x,u_k(x)), g_k(x) = a(x) + b|u_k(x)|^{\frac{p}{r}}, \\ k = 1, 2, \cdots \end{aligned} \tag{6.2.9}$$

由 F 在 $\bar{\Omega} \times R$ 上满足 Carathéodory 条件及 (6.2.8) 知道

$$f_k \to f_0, \quad \text{a.e.} \quad \text{在 } \Omega \text{ 中}, \tag{6.2.10}$$

$$g_k \to g_0, \quad \text{a.e.} \quad \text{在 } \Omega \text{ 中}. \tag{6.2.11}$$

由 (6.2.9) 及 (6.2.4) 又可得出

$$|f_k(x)| \le |g_k(x)|, \quad \forall x \in \Omega, \quad k = 0, 1, 2, \cdots \tag{6.2.12}$$

由于

$$||u_k|^p - |u_0|^p| \le |u_k|^p + |u_0|^p,$$

根据 Fatou 定理得

$$\int_\Omega \underline{\lim}_{k\to\infty}[|u_k|^p + |u_0|^p - ||u_k|^p - |u_0|^p|]dx$$

$$\le \underline{\lim}_{k\to\infty}\int_\Omega [|u_k|^p + |u_0|^p - ||u_k|^p - |u_0|^p|]dx.$$

由此，利用 (6.2.8) 及 (6.2.6) 得出

$$2\int_\Omega |u_0|^p dx \le 2\int_\Omega |u_0|^p dx - \overline{\lim}_{k\to\infty}\int_\Omega ||u_k|^p - |u_0|^p|dx.$$

因此有

$$\lim_{k\to\infty}\int_\Omega ||u_k|^p - |u_0|^p|dx = 0.$$

于是，由 (6.2.9) 得出

$$\int_\Omega |g_k - g_0|^r dx = b^r \int_\Omega |\ |u_k|^{\frac{p}{r}} - |u_0|^{\frac{p}{r}}|^r dx$$

$$\le b^r \int_\Omega |\ |u_k|^p - |u_0|^p|dx \to 0, \text{ 当 } k \to \infty.$$

由此可以推出

$$\int_\Omega |g_k|^r dx \to \int_\Omega |g_0|^r dx. \tag{6.2.13}$$

由 Holder 不等式及 (6.2.12) 有

$$|f_k - f_0|^r \le 2^{r-1}(|f_k|^r + |f_0|^r)$$

$$\le 2^{r-1}(|g_k|^r + |g_0|^r), \quad \text{a.e. 在 } \Omega \text{ 中}.$$

由此，又利用 Fatou 定理得

$$\int_\Omega \underline{\lim}_{k\to\infty}[2^{r-1}(|g_k|^r+|g_0|^r)-|f_k-f_0|^r]dx$$

$$\leq \underline{\lim}_{k\to\infty}\int_\Omega [2^{r-1}(|g_k|^r+|g_0|^r)-|f_k-f_0|^r]dx.$$

由此，利用 (6.2.13), (6.2.10) 及 (6.2.11) 得出

$$2^r\int_\Omega |g_0|^r dx \leq 2^r\int_\Omega |g_0|^r dx - \overline{\lim}_{k\to\infty}\int_\Omega |f_k-f_0|^r dx,$$

于是有

$$\lim_{k\to\infty}\int_\Omega |f_k-f_0|^r dx = 0.$$

由 (6.2.9), 上式即

$$\lim_{k\to\infty}\int_\Omega |F(x,u_k(x))-f(x,u_0(x))|^r dx = 0.$$

此式与 (6.2.7) 矛盾.

注 定理 6.2.1 可推广为：设 $p_i\geq 1(i=1,2,\cdots,m)$, $r\geq 1$, 函数 F 在 $\Omega\times R^m$ 上满足 Carathéodory 条件及不等式

$$|F(x,u_1,\cdots,u_m)|\leq a(x)+b\sum_{i=1}^m |u_i|^{\frac{p_i}{r}},$$

$$\forall (x,u_1,\cdots,u_m)\in\Omega\times R^m,$$

其中 $a(x)\in L^r(\Omega)$, $b>0$, 则涅梅茨基算子

$$A:\quad (u_1,\cdots,u_m)\to P(x,(u_1,\cdots,u_m))$$

是 $L^{p_1}(\Omega)\times L^{p_2}(\Omega)\times\cdots\times L^{p_m}(\Omega)\to L^r(\Omega)$ 的有界连续算子. 参阅文献 [18] §19.2 节.

6.3 泛函的 Gâteaux 微分

下面定义是多元函数的方向导数概念对泛函的推广.

定义 设 E 是 Banach 空间, $I:E\to R$ 是 E 上的泛函. 若对 $u,\varphi\in E$, 极限

$$\lim_{t\to 0}\frac{I(u+t\varphi)-I(u)}{t} \tag{6.3.1}$$

存在, 则称 I 在 u 处 Gâteaux 可微, 极限 (6.3.1) 称为 I 在 u 处 (沿方向 φ) 的 **Gâteaux 微分**, 记为 $DI(u,\varphi)$, 即

$$DI(u,\varphi)=\lim_{t\to 0}\frac{I(u+t\varphi)-I(u)}{t}. \tag{6.3.2}$$

如果 Gâteaux 微分 (6.3.2) 可以表为

$$DI(u,\varphi)=\langle B,\varphi\rangle,\quad B\in E^*, \tag{6.3.3}$$

则称 I 在 u 处**具有线性有界的 Gâteaux 微分**, B 称为 I 在 u 处 (沿方向 ϕ) 的 **Gâteaux 导数**, 记为 $B=DI(u)$, 即

$$DI(u,\varphi)=\langle DI(u),\varphi\rangle. \tag{6.3.4}$$

定理 6.3.1 设 I 是 Banach 空间 E 上的泛函, $u\in E$. 如果 I 在 u 的某邻域内具有线性有界的 Gâteaux 微分, 且 Gâteaux 导数 $DI(u)$ 在 u 处是连续的, 则 I 在 u 处 Fréchet 可微, 且 $DI(u)=I'(u)$.

证 设 I 在 u 的邻域 $B_r(u)$ 内沿 φ 方向具有线性有界的 Gâteaux 导数, 不妨设 $||\varphi||<r$, 命

$$g(s)=I(u+s\varphi),\quad s\in[0,1]. \tag{6.3.5}$$

当 $s\in[0,1]$ 时, $u+s\varphi\in B_r(u)$, 由 (6.3.2),(6.3.4) 及 (6.3.5) 得出

$$\begin{aligned}\langle DI(u,s\varphi),\varphi\rangle&=\lim\nolimits_{t\to 0}\frac{I(u+s\varphi+t\varphi)-I(u+s\varphi)}{t}\\&=\lim\nolimits_{t\to 0}\frac{g(s+t)-g(s)}{t}=g'(t).\end{aligned}$$

由中值公式, 存在 $\theta,0<\theta<1$ 使得

$$g(1)-g(0)=g'(\theta),$$

即

$$I(u+\varphi)-I(u)=\langle DI(u+\theta\varphi),\varphi\rangle. \tag{6.3.6}$$

令

$$\omega(u,\varphi)=I(u+\varphi)-I(u)-\langle DI(u,\varphi),\varphi\rangle, \tag{6.3.7}$$

则有

$$I(u+\varphi)=I(u)+\langle DI(u,\varphi),\varphi\rangle+\omega(u,\varphi). \tag{6.3.8}$$

以 (6.3.6) 代入 (6.3.7) 得

$$\begin{aligned}\omega(u,\varphi) &= \langle DI(u+\theta\varphi),\varphi\rangle-\langle DI(u,\varphi),\varphi\rangle\\ &= \langle DI(u+\theta\varphi)-DI(u,\varphi)\varphi\rangle.\end{aligned}$$

从而有

$$|\omega(u,\varphi)|\le\|DI(u+\theta\varphi)-DI(u,\varphi)\|\,\|\varphi\|.$$

因为 $DI(u)$ 在 u 处是连续的，由上式得出

$$\frac{|\omega(u,\varphi)|}{\|\varphi\|}\le\|DI(u,\theta\varphi)-DI(u,\varphi)\|\to 0,\quad 当\|\varphi\|\to 0.$$

此式及 (6.3.8) 说明，I 在 u 处 Fréchet 可微，且 $DI(u)=I'(u)$. 证完.

利用定理 6.3.1, 我们可以证明下面的定理，它将在以后两章中经常用到.

定理 6.3.2 设函数 f 在 $\Omega\times R$ 上满足 Carathéodory 条件，且

$$|f(x,u)|\le a(x)+b|u|^r,\quad \forall(x,u)\in\Omega\times R, \tag{6.3.9}$$

其中 $a(x)\in L^{\frac{r+1}{r}}(\Omega)$, b 为正常数，常数 r 满足

$$0<r\begin{cases}\le\dfrac{n+2}{n-2}, & 当\ n>2,\\ =任意正数, & 当\ n\le 2.\end{cases} \tag{6.3.10}$$

记 $F(x,u)=\int_0^u f(x,t)dt$, 那么, 对 $E=W_0^{1,2}(\Omega)$,

$$J(u)=\int_\Omega F(x,u(x))dx \tag{6.3.11}$$

有 $J\in C^1(E,R)$, 且有

$$\langle J'(u),\varphi\rangle=\int_\Omega f(x,u(x))\varphi dx. \tag{6.3.12}$$

如果条件 (6.3.10) 中的 $\leq$ 改为 $<$, 则 J' 是 $E\to E^*$ 的紧算子.

证 由中值公式, 泛函 (6.3.11) 的 Gâteaux 微分为

$$\begin{aligned} DJ(u,\varphi) &= \lim_{t\to 0}\frac{J(u+t\varphi)-J(u)}{t}\\ &=\lim_{t\to 0}\int_\Omega \frac{1}{t}[F(x,u+t\varphi)-F(x,u)]dx \qquad (6.3.13)\\ &=\lim_{t\to 0}\int_\Omega f(x,u+\theta t\varphi)\varphi dx, \end{aligned}$$

其中 $0\leq\theta=\theta(x,u(x),t\varphi(x))\leq 1$.

当 $u,\varphi\in W_0^{1,2}(\Omega)$ 时, 由条件 (6.3.10), 根据嵌入定理 5.6.1 知道 $u,\varphi\in L^{r+1}(\Omega)$, 且存在常数 $C>0$, 使得

$$||v||_{r+1}\leq C||v||_E,\quad \forall v\in E=W_0^{1,2}(\Omega). \tag{6.3.14}$$

由 (6.3.9), 利用 Young 不等式 (5.1.4) 及不等式

$$(a+b)^p\leq 2^{p-1}(|a|^p+|b|^p),\quad p\geq 1$$

得出: 当 $|t|\leq 1$ 时有

$$\begin{aligned} &|f(x,u+\theta t\varphi)\varphi|\\ &\leq [a(x)+b|u+\theta t\varphi|^r]|\varphi|\\ &\leq \frac{r}{r+1}[a(x)+b|u+\theta t\varphi|^r]^{\frac{r}{r+1}}+\frac{1}{r+1}|\varphi|^{r+1}\\ &\leq \frac{2^{\frac{1}{r}}r}{r+1}[|a(x)|^{\frac{r+1}{r}}+b^{\frac{r+1}{r}}|u+\theta t\phi|^{r+1}]+\frac{1}{r+1}|\phi|^{r+1} \end{aligned}$$

$$\leq \frac{2^{\frac{1}{r}}r}{r+1}[|a(x)|^{\frac{r+1}{r}}+2^r b^{\frac{r+1}{r}}(|u|^{r+1}+|\theta t\phi|^{r+1})]+\frac{1}{r+1}|\varphi|^{r+1}$$

$$\leq \frac{2^{\frac{1}{r}}r}{r+1}[|a(x)|^{\frac{r}{r+1}}+2^r b^{\frac{r}{r+1}}(|u|^{r+1}+|\varphi|^{r+1})]+\frac{1}{r+1}|\phi|^{r+1}.$$

此不等式右端是一个与 t 无关的可积函数，利用 Lebesgue 控制收敛定理，由 (6.3.13) 得出

$$DJ(u,\phi)=\int_\Omega f(x,u)\phi dx. \tag{6.3.15}$$

对于固定的 u，由上式定义的泛函 $DJ(u,\phi)$ 关于 ϕ 显然是线性的. 由条件 (6.3.9), 根据定理 6.2.1, 算子

$$S: u(x)\to f(x,u(x))$$

是 $L^{r+1}(\Omega)\to L^{\frac{r+1}{r}}(\Omega)$ 的有界连续算子. 因此，由 (6.3.15) 及 (6.3.14) 得出

$$\begin{aligned}|DJ(u,\phi)| &\leq \int_\Omega |f(x,u)\varphi|dx\\ &\leq \|f(x,u)\|_{\frac{r+1}{r}}\|\varphi\|_{r+1}\\ &\leq C\|f(x,u)\|_{\frac{r+1}{r}}\|\varphi\|_E.\end{aligned}$$

因此， $DJ(u,\varphi)$ 为关于 φ 的线性有界泛函，从而泛函 J 在 u 处有线性有界的 Gâteaux 微分

$$DJ(u,\varphi)=\langle DJ(u),\varphi\rangle,\quad \forall u,\varphi\in W_0^{1,2}(\Omega), \tag{6.3.16}$$

其中 $DJ(u)$ 为 J 在 u 处的 Gâteaux 导数.

我们再证明 Gâteaux 导数 $DJ(u)$ 关于 u 是连续的. 对任意的 $u,v,\varphi\in E=W_0^{1,2}(\Omega)$. 由 (6.3.16),(6.3.15) 及 (6.3.14) 有

$$\begin{aligned}&|\langle DJ(u)-DJ(v),\varphi\rangle|\\ &=\left|\int_\Omega [f(x,u)-f(x,v)]\varphi dx\right|\end{aligned}$$

$$\leq ||f(x,u)-(x,v)||_{\frac{r+1}{r}}||\varphi||_{r+1}$$

$$\leq C||f(x,u)-f(x,v)||_{\frac{r+1}{r}}||\varphi||_{E}.$$

由此得出

$$||DJ(u)-DJ(v)||\leq C||f(x,u)-f(x,v)||_{\frac{r+1}{r}}.$$

此式说明，算子

$$T: \quad f(x,u)\to DJ(u)$$

是 $L^{\frac{r+1}{r}}(\Omega)\to E^*$ 的连续算子，由嵌入定理 5.6.1, 算子

$$I: \quad u\to u$$

是 $W_0^{1,2}(\Omega)\to L^{r+1}(\Omega)$ 的连续算子；当条件 (6.3.10) 中 $\leq$ 改为 $<$ 时，由嵌入定理 5.7.1 知道，算子 I 又是 $W_0^{1,2}(\Omega)\to L^{r+1}(\Omega)$ 的紧算子. 因而，算子

$$DJ=T\circ S\circ I: \quad u\to DJ(u)$$

是 $E\to E^*$ 的连续算子，且当条件 (6.3.10) 中的 $\leq$ 改为 $<$ 时，$DJ:E\to E^*$ 又是紧算子. 这样一来, 由定理 6.3.1 知道，J 在 u 处 Fréchet 可微, 其 Fréchet 导数是 $J'(u)=DJ(u)$, 因而 $J\in C^1(E,R)$. 再由 (6.3.16) 及 (6.3.15) 得出 (6.3.12), 且当条件 (6.3.10) 中的 $\leq$ 改为 $<$ 时，算子 $J'=DJ: \quad u\to J'(u)$ 是 $E\to E^*$ 紧算子.

6.4 抽象函数的积分与微分

设 E 是 Banach 空间. 自变量为实数 $t\in[a,b]$, 而函数值为 $x(t)\in E$ 的函数称为 **抽象函数** 或 **向量函数**, 记为

$$x(t): \quad [a,b]\to E.$$

定义 1 设 $x(t):[a,b]\to E, t\in[a,b]$. 如果对任意 $\epsilon>0$, 存在 $\delta=\delta(\epsilon,t)>0$ 使得

$$||x(t+\Delta t)-x(t)||<\delta, \quad 当|\Delta t|<\delta,$$

则称 $x(t)$ 在 t 点连续. 如果 $x(t)$ 在 $[a,b]$ 上每一点连续, 则称 $x(t)$ 在 $[a,b]$ 上连续.

与普通连续函数一样, 应用有限覆盖定理可以证明抽象连续函数的下列基本性质.

引理 6.4.1 如果抽象函数 $x(t)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 则 $x(t)$ 在 $[a,b]$ 上一致连续, 即对任意 $\epsilon>0$, 存在 $\delta=\delta(\epsilon)>0$ 使得

$$||x(t)-x(t')||<\epsilon,\quad 当t,t'\in[a,b],|t-t'|<\delta.$$

定义 2 设 $x(t):[a,b]\to E$ 是一个抽象函数. 如果存在 $z\in E$ 使得: 对 $[a,b]$ 的任一分法

$$T:\quad a=t_0<t_1<\cdots<t_{i-1}<t_i<\cdots<t_n=b \tag{6.4.1}$$

及任意 $\xi_i\in[t_{i-1},t_i](i=1,2,\cdots,n)$ 所作的积分和

$$\sigma=\sum_{i=1}^{n}x(\xi_i)\Delta t_i,\quad \Delta t_i=t_i-t_{i-1} \tag{6.4.2}$$

满足

$$当d(T)=\max_{1\le i\le n}\Delta t_i\to 0时有||\sigma-z||\to o, \tag{6.4.3}$$

则称 $x(t)$ 在 $[a,b]$ 上 **Riemann 可积**, z 称为 $x(t)$ 在 $[a,b]$ 上的 **Riemann 积分**(简称为 **积分**), 记为

$$z=\int_a^b x(t)dt=\lim_{d(T)\to 0}\sigma,$$

即

$$\int_a^b x(t)dt=\lim_{d(T)\to 0}\sum_1^n x(\xi_i)\Delta t_i. \tag{6.4.4}$$

定理 6.4.2 如果抽象函数 $x(t)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 则 $x(t)$ 在 $[a,b]$ 上可积.

证 对任意 ϵ, 因为 $x(t)$ 在 $[a,b]$ 上连续，由引理 6.4.1, $x(t)$ 在 $[a,b]$ 上一致连续，从而存在 $\delta=\delta(\epsilon)>0$ 使得

$$\|x(t)-x(t')\|<\frac{\epsilon}{4(b-a)},\quad \forall t,t'\in[a,b],|t-t'|<\delta. \tag{6.4.5}$$

设 T,T' 是任意两个分法，他们满足

$$d(T)<\delta,\quad d(T')<\delta.$$

今证明对应于 T 与 T' 的积分和 σ 与 σ' 满足

$$\|\sigma-\sigma'\|<\frac{\epsilon}{2}. \tag{6.4.6}$$

把 T 与 T' 的所有分点合并起来得到的分法记为 T'', 于是 $d(T'')<\delta$. 设分法 T 为 (6.4.1), 相应的积分和为 (6.4.2). T'' 是在分法 T 的基础上加入 T' 的分点而成. 设加入的分点将区间 $[t_{i-1},t_i]$ 再分成 $m_i(m_i\geq 1)$ 个小区间，其分点为

$$t_{i-1}=t_{i0}<t_{i1}<\cdots<t_{im_i}=t_i.$$

于是，对应于 T'' 的积分和为

$$\sigma''=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m_i}x(\xi_{ij})(t_{ij}-t_{i,j-1}),\quad \xi_{ij}\in[t_{i,j-1},t_{ij}]. \tag{6.4.7}$$

由于 $d(T'')<\delta$, 由 (6.4.2), (6.4.7) 及 (6.4.5) 得出

$$\begin{aligned}&\|\sigma-\sigma''\|\\ &=\left\|\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m_i}[x(\xi_i)-x(\xi_{ij})](t_{ij}-t_{i,j-1})\right\|\\ &\leq\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m_i}\|x(\xi_i)-x(\xi_{ij})\|\,(t_{ij}-t_{i,j-1})\\ &<\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m_i}\frac{\epsilon}{4(b-a)}(t_{ij}-t_{i,j-1})=\frac{\epsilon}{4}.\end{aligned}$$

同法可证

$$\|\sigma-\sigma''\|<\frac{\epsilon}{4}.$$

从而有

$$\|\sigma-\sigma'\|\leq\|\sigma-\sigma''\|+\|\sigma''-\sigma'\|<\frac{\epsilon}{2}.$$

这就是要证明的不等式 (6.4.6).

将区间 $[a,b]$ 作 n 等分, 令 $\Delta t=\dfrac{b-a}{n}$, 分点为 $t_i=a+i\Delta t(i=0,1,\cdots,n)$, 得到 n 等分法:

$$T_n:\quad a=t_0<t_1<\cdots<t_{i-1}<t_i<\cdots<t_n=b.$$

作积分和

$$\sigma_n=\sum_{i=1}^{n}x(t_i)(t_i-t_{i-1}).$$

对等两种分法 T_n, T_m, 当 $d(T_n)=\dfrac{b-a}{n}<\delta$, $d(T_m)=\dfrac{b-a}{m}<\delta$ 时, 由 (6.4.6) 有

$$\|\sigma_n-\sigma_m\|<\frac{\epsilon}{2}. \tag{6.4.8}$$

即当 $n,m>\dfrac{b-a}{\delta}=\dfrac{b-a}{\delta(\epsilon)}$ 时有 (6.4.8). 这就说明 $\{\sigma_n\}$ 是 E 中的 Cauchy 序列. 由 E 的完备性知道, 存在 $z\in E$ 使得

$$\|\sigma_n-z\|\to 0,\quad \text{当}n\to\infty. \tag{6.4.9}$$

今证对任一分法 T 及相应的积分和 σ 有

$$\lim_{d(T)\to 0}\|\sigma-z\|=0. \tag{6.4.10}$$

设任一分法 T 及 n 等分法 T_n 满足

$$d(T)<\delta,d(T_n)=\frac{b-a}{n}<\delta,$$

则由 (6.4.6) 有

$$\|\sigma-\sigma_n\|<\frac{\epsilon}{2}. \tag{6.4.11}$$

由 (6.4.9), 存在 n_0, 当 $n \geq n_0$ 时有

$$\|\sigma_n - z\| < \frac{\epsilon}{2}. \tag{6.4.12}$$

取 $n > \max\left(\frac{b-a}{\delta}, n_0\right)$, 则由 (6.4.11) 及 (6.4.12), 当 $d(T) < \delta$ 时有

$$\|\sigma - z\| \leq \|\sigma - \sigma_n\| + \|\sigma_n - z\| < \epsilon.$$

这就证明了 (6.4.10) 成立，即 $x(t)$ 在 $[a,b]$ 上可积.

引理 6.4.3 如果抽象函数 $x(t):[a,b] \to E$ 在 $[a,b]$ 上连续，则

$$\left\|\int_a^b x(t)dt\right\| \leq \int_a^b \|x(t)\|dt. \tag{6.4.13}$$

证 对任一分法 T 及对应的积分和 σ, 如 (6.4.1) 及 (6.4.2) 所示，有

$$\|\sigma\| = \left\|\sum_1^n x(\xi_i)\Delta t_i\right\| \leq \sum_{i=1}^n \|x(\xi_i)\|\Delta t_i.$$

此式右端为普通函数 $\|x(t)\|$ 的积分和，所以，对上式当 $d(T) = \max_i \Delta t_i \to 0$ 取极限就得出 (6.4.13).

定义 3 设 $x(t):[a,b] \to E$, $t \in [a,b]$. 如果存在 $y \in E$ 使得

$$\lim_{h\to 0}\left\|\frac{x(t+h)-x(t)}{h} - y\right\| = 0,$$

则称 $x(t)$ 在 t 处可微. 称 y 为 $x(t)$ 在 t 处的导数，记为 $y = x'(t)$, 即

$$x'(t) = \lim_{h\to 0}\frac{x(t+h)-x(t)}{h}. \tag{6.4.14}$$

如果 $x(t)$ 在 $[a,b]$ 中每一点均可微 (在 a 处右可微，在 b 处左可微), 则称 $x(t)$ 在 $[a,b]$ 上可微. 导数 $x'(t):[a,b] \to E$ 也是一个抽象函数.

引理 6.4.4 如果 $x(t):[a,b] \to E$ 在 t 处可微，则 $x(t)$ 在 t 处连续.

证 如果 $x(t)$ 在 t 处可微，则

$$\begin{aligned}&\|x(t+h)-x(t)\|\\=&\left\|h\left[\frac{x(t+h)-x(t)}{h}-x'(t)\right]+hx'(t)\right\|\\\le& h\left\|\frac{x(t+h)-x(t)}{h}-x'(t)\right\|+h\|x'(t)\|\to 0,\quad 当\ h\to 0,\end{aligned}$$

即 $x(t)$ 在 t 处连续.

定理 6.4.5 设 $x(t):[a,b]\to E$ 在 $[a,b]$ 上连续，令

$$y(t)=\int_a^t x(s)ds,\quad t\in[a,b],\tag{6.4.15}$$

则 $y(t)$ 在 $[a,b]$ 上可微，且

$$y'(t)=x(t),\quad \forall t\in[a,b].\tag{6.4.16}$$

证 设 $t\in[a,b]$. 对任意 $\epsilon>0$, 由 $x(t)$ 的连续性知道，存在 $\delta=\delta(\epsilon)>0$ 使得

$$\|x(s)-x(t)\|<\epsilon,\quad 当\ s\in[a,b],|s-t|<\delta.\tag{6.4.17}$$

因此，当 $0<h<\delta$ 时，由 (6.4.13) 及 (6.4.17) 得出

$$\begin{aligned}&\left\|\frac{y(t+h)-y(t)}{h}-x(t)\right\|\\=&\left\|\frac{1}{h}\int_t^{t+h}[x(s)-x(t)]ds\right\|\\\le&\frac{1}{h}\int_t^{t+h}\|x(s)-x(t)\|ds=\frac{1}{h}\int_t^{t+h}\epsilon ds=\epsilon.\end{aligned}$$

当 $-\delta<h<0$ 时，由 (6.4.13) 及 (6.4.17) 又有

$$\begin{aligned}&\left\|\frac{y(t+h)-y(t)}{h}-x(t)\right\|\\=&\left\|\frac{1}{-h}\int_{t+h}^{t}[x(s)-x(t)]ds\right\|\end{aligned}$$

$$\le \frac{1}{-h}\int_{t+h}^{t}\|x(s)-x(t)\|ds \le \frac{1}{-h}\int_{t+h}^{t}\epsilon ds = \epsilon.$$

这样一来，我们得出了当 $0<|h|<\delta$ 时，有

$$\left\|\frac{y(t+h)-y(t)}{h}-x(t)\right\| < \epsilon.$$

此式说明

$$y'(t) = \lim_{h\to 0}\frac{y(t+h)-y(t)}{h} = x(t).$$

6.5 Banach 空间中的常微分方程初值问题

设 E 是 Banach 空间，算子 $f: E\to E$. 我们将对 Banach 空间 E 中的常微分方程初值问题

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(x(t)), \quad x(t_0)=u, \quad u\in E \tag{6.5.1}$$

建立解的存在唯一性定理及解对初值的连续依赖性. 为此，我们要用到下面的 **压缩映像原理**.

定理 6.5.1 设 X 是 Banach 空间，Σ 是 X 中的闭集，算子 A: $X\to X$ 在 Σ 上是压缩的，即

$$Ax\in\Sigma, \quad \forall x\in\Sigma, \tag{6.5.2}$$

且存在正数 $\theta<1$ 使得

$$\|Ax-Ay\| \le \theta\|x-y\|, \quad \forall x,y\in\Sigma, \tag{6.5.3}$$

则存在唯一的 $x\in\Sigma$ 使得

$$Ax = x. \tag{6.5.4}$$

满足等式 (6.5.4) 的 x 称为算子 A 的 **不动点**.

证 任意取定 $x_0\in\Sigma$, 作迭代序列

$$Ax_{n+1} = x_n, \quad n=0,1,2,\cdots \tag{6.5.5}$$

由条件 (6.5.3) 得

$$\|x_2 - x_1\| = \|Ax_1 - Ax_0\| \le \theta\|x_1 - x_0\| = \theta\|Ax_0 - x_0\|$$

$$\|x_3 - x_2\| = \|Ax_2 - Ax_1\| \le \theta\|x_2 - x_1\| = \theta^2\|Ax_0 - x_0\|$$

$$\cdots\cdots$$

$$\|x_{n+1} - x_n\| \le \theta^n\|Ax_0 - x_0\|$$

$$\cdots\cdots$$

于是，对任意 $n \ge 1, k \ge 1$ 有

$$\begin{aligned}
&\|x_{n+k} - x_n\| \\
\le\ &\|x_{n+k} - x_{n+k-1}\| + \|x_{n+k-1} - x_{n+k-2}\| + \cdots + \|x_{n+1} - x_n\| \\
\le\ &(\theta^{n+k-1} + \theta^{n+k-2} + \cdots + \theta^n)\|Ax_0 - x_0\| \\
=\ &\frac{\theta^n - \theta^{n+k}}{1-\theta}\|Ax_0 - x_0\| \le \frac{\theta^n}{1-\theta}\|Ax_0 - x_0\| \to 0 \quad 当\ n \to \infty.
\end{aligned}$$

此式说明，$\{x_n\}$ 是 X 中的 Cauchy 序列. 因此，存在 $x \in X$ 使得

$$x = \lim_{n\to\infty} x_n. \tag{6.5.6}$$

根据条件 (6.5.2) 知道，由 (6.5.5) 定义的序列 $\{x_n\} \subset \Sigma$. 再根据 Σ 是 X 中的闭集得出，由 (6.5.6) 定出的极限元素 $x \in \Sigma$.

今证明 x 是算子 A 的不动点. 由条件 (6.5.3) 得出

$$\begin{aligned}
\|Ax - x\| &\le \|Ax - x_n\| + \|x_n - x\| \\
&= \|Ax - Ax_{n-1}\| + \|x_n - x\| \\
&\le \theta\|x - x_{n-1}\| + \|x_n - x\| \to 0, \quad 当 \to \infty.
\end{aligned}$$

由此得出 $Ax = x$.

再证明算子 A 的不动点是唯一的. 设有两个元素 $x, y \in \Sigma$ 使得

$$Ax = x, \quad Ay = y,$$

则由 (6.5.3) 得

$$||x-y|| = ||Ax - Ay|| \le \theta||x-y||.$$

因为 $0 < \theta < 1$, 由上式得出 $x = y$. 证完.

现在我们来证明 Banach 空间中常微分方程初值问题 (6.5.1) 的解的存在唯一性及解对初值的连续依赖性定理.

定理 6.5.2 设 E 是 Banach 空间, 算子 $f: E \to E$ 满足条件: 存在常数 $M > 0$, 使得

$$||f(x)|| \le M, \quad \forall x \in E. \tag{6.5.7}$$

再设算子 f 是局部 Lipschitz 连续的, 即对任意元素 $u \in E$, 存在常数 $R = R(u) > 0$, $K = K(u) > 0$, 使得

$$||f(x) - f(y)|| \le K||x-y||, \quad \forall\, x, y \in B_R(u). \tag{6.5.8}$$

那么

(i) 对任意满足

$$0 < \delta < \min\left(\frac{R}{M}, \frac{1}{K}\right) \tag{6.5.9}$$

的 δ, 常微分方程初值问题 (6.5.1) 在 $[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ 上有唯一的解 $x(t)$, 它满足

$$||x(t) - u|| \le R, \quad \forall t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta]. \tag{6.5.10}$$

(ii) 常微分方程初值问题 (6.5.1) 在 $(-\infty, +\infty)$ 中有唯一的解 $x(t) = x(t, t_0, u)$. 当 $t_0 = 0$ 时记 $x(t, 0, u) = x(t, u)$.

(iii) 对任意 $c > t_0$(或 $c < t_0$), 初值问题 (6.5.1) 的解 $x(t, t_0, u)$ 关于 $t \in [t_0, c]$(或 $t \in [c, t_0]$) 是初值 u 的一致连续函数, 即对任意 $\epsilon > 0$, 存在 $r = r(\epsilon) = r(\epsilon, t_0, c, u)$ 使得当 $v \in E$, $||v - u|| < r$ 时, 有

$$||x(t, t_0, v) - x(t, t_0, u)|| < \epsilon, \quad \forall t \in [t_0, c](\text{或} t \in [c, t_0]). \tag{6.5.11}$$

证 由定理 6.4.5 知道，初值问题 (6.5.1) 等价于 Banach 空间中的积分方程

$$x(t) = u + \int_{t_0}^{t} f(x(s))ds. \tag{6.5.12}$$

以 $X = C([t_0 - \delta, t_0 + \delta], E)$ 表示 $[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ 上一切连续抽象函数 $x(t)$ 所成的 Banach 空间，其中范数定义为

$$||x(t)||_X = \max_{t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta]} ||x(t)||.$$

(i) 对 $u \in E$, 以

$$\Sigma = \Sigma_R(u) = \{x(t) \in X | \; ||x(t) - u||_X \leq R\}$$

表示 X 中以 u 为中心，以 R 为半径的闭球. 再以等式

$$Ax(t) = u + \int_{t_0}^{t} f(x(s))ds \tag{6.5.13}$$

定义一个 $X \to X$ 的算子. 今证明 A 是 Σ 上的压缩算子. 当 $x(t) \in \Sigma$ 时，由引理 6.4.3 及条件 (6.5.7) 有

$$||Ax(t) - u|| = \left\| \int_{t_0}^{t} f(x(s))ds \right\| \leq M|t - t_0| \leq M\delta,$$

$$\forall t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta].$$

由此式及 (6.5.9) 得出

$$||Ax(t) - u||_X \leq M\delta < R, \tag{6.5.14}$$

即 $Ax(t) \in \Sigma$. 这说明算子 A 满足条件 (6.5.2).

又当 $x(t), y(t) \in \Sigma$ 时，根据引理 6.4.3 及条件 (6.5.8), 由 (6.5.13) 得出：对任意 $t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ 有

$$\begin{aligned} ||Ax(t) - Ay(t)|| &= \left\| \int_{t_0}^{t} [f(x(s)) - f(y(s))]ds \right\| \\ &\leq K \max\nolimits_{s \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta]} ||x(s) - y(s)|| |t - t_0| \\ &\leq K\delta ||x(t) - y(t)||_X. \end{aligned}$$

于是得出

$$\|Ax(t) - Ay(t)\|_X \le K\delta\|x(t) - y(t)\|_X. \qquad (6.5.15)$$

由条件 (6.5.9) 有 $0 < K\delta < 1$. 因此，不等式 (6.5.15) 说明条件 (6.5.3) 也是满足的. 由定理 6.5.1 知道，算子 A 有唯一的不动点 $x(t) \in \Sigma$ 使得

$$Ax(t) = x(t). \qquad (6.5.16)$$

由此式及 (6.5.13) 得出 (6.5.12)，即 $x(t)$ 是积分方程 (6.5.12) 在 Σ 中的唯一解，从而也是常微分方程初值问题 (6.5.1) 满足条件 (6.5.10) 的唯一解.

(ii) 先证初值问题 (6.5.1) 的解 $x(t)$ 的最大存在区间必为开区间 (a,b), $-\infty \le a < t_0 < b \le +\infty$. 这里只证明解 $x(t)$ 的向右最大存在区间必为半开区间 $[t_0,b)$, $t_0 < b \le +\infty$. (同样可证解 $x(t)$ 的向左最大存在区间必为半开区间 $(a,t_0]$, $-\infty \le a < t_0$). 用反证法，设问题 (6.5.1) 的解 $x(t)$ 向右的最大存在区间为闭区间 $[t_0,b]$, $t_0 < b < +\infty$. 记 $x_b = x(b)$. 则由 (i) 知道，对满足条件 (6.5.8) 的 $R_b = R(x_b)$, $K_b = K(x_b)$, 当正数 $\delta_b < \min(\frac{R_b}{M}, \frac{1}{K_b})$ 时，初值问题

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(x(t)), \quad x(b) = x_b$$

在 $[b-\delta_b, b+\delta_b]$ 上有解 $x_b(t)$. 这样一来，抽象函数

$$\bar{x}(t) = \begin{cases} x(t), & t \in [t_0,b], \\ x_b(t), & t \in [b, b+\delta_b] \end{cases}$$

为初值问题 (6.5.1) 在 $[t_0, b+\delta_b]$ 上的解. 这与 $[t_0,b]$ 是问题 (6.5.1) 的解的向右最大存在区间矛盾.

今证明问题 (6.5.1) 的解的最大存在区间为 $(-\infty,+\infty)$. 上面已经证明解 $x(t)$ 的最大存在区间为开区间 (a,b), $-\infty \le a < t_0 < b \le +\infty$. 需证 $a = -\infty$, $b = +\infty$. 相反，设 $b < +\infty$, 我们将得出矛盾的结果 (如果 $a = -\infty$, 同样得出矛盾的结果). 任取

$t_0 < t_1 < t_2 < b$, 由于微分方程初值问题 (6.5.1) 的解 $x(t)$ 也是积分方程 (6.5.12) 的解，由引理 6.4.3 及 (6.5.7) 得出

$$\begin{aligned}||x(t_2) - x(t_1)|| &= \left\| \int_{t_1}^{t_2} f(x(s))dx - \int_{t_0}^{t_1} f(x(s))dx \right\| \\ &= \left\| \int_{t_1}^{t_2} f(x(s))dx \right\| \\ &\leq M(t_2 - t_1) \to 0, \quad 当\ t_1, t_2 \to b - 0.\end{aligned}$$

由 E 的完备性知道，存在 $x_b \in E$ 使得

$$\lim_{t \to b-0} x(t) = x_b.$$

令 $x(b) = x_b$, 则解 $x(t)$ 的向右最大存在区间包含闭区间 $[t_0, b]$. 这与假设解 $x(t)$ 的向右最大存在区间为半开区间 $[t_0, b)$ 相矛盾.

再证明初值问题 (6.5.1) 在 $(-\infty, +\infty)$ 中的解 $x(t)$ 是唯一的. 设 $x_1(t), x_2(t)$ 是问题 (6.5.1) 的两个解. 我们先来证明

$$x_1(t) = x_2(t), \quad \forall t \in [t_0, +\infty). \tag{6.5.17}$$

由 (i), 对满足 (6.5.9) 的一个正数 δ, 问题 (6.5.1) 在 $[t_0, t_0 + \delta]$ 中的解是唯一的，即

$$x_1(t) = x_2(t), \quad \forall t \in [t_0, t_0 + \delta]. \tag{6.5.18}$$

如果 (6.5.17) 不成立，则由 (6.5.18) 知道，存在正数 $b \geq t_0 + \delta$, 使得

$$x_1(t) = x_2(t), \quad \forall t \in [t_0, b], \tag{6.5.19}$$

且对任意小的正数 ϵ

$$x_1(t) = x_2(t), \quad \forall t \in [t_0, b + \epsilon] \tag{6.5.20}$$

不成立. 令 $x_1(b) = x_2(b) = x_b$, 由 (i) 知道，对满足 (6.5.8) 的 $R_b = R(x_b)$, $K = K(x_b)$, 当正数 $\delta_b < \min(\frac{R_b}{M}, K_b)$ 时，初值问题

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(x(t)), \quad x(b) = x_b$$

在 $[b,b+\delta_b]$ 上有唯一的解. 因此

$$x_1(t)=x_2(t), \quad \forall t\in[b,b+\delta_b], \tag{6.5.21}$$

合并 (6.5.19) 及 (6.5.21) 得出

$$x_1(t)=x_2(t), \quad \forall t\in[t_0,b+\delta_b].$$

此式与 (6.5.20) 对任意小的正数 ϵ 不成立相矛盾. 这就证明了 (6.5.17). 同样可证

$$x_1(t)=x_2(t), \quad \forall t\in(-\infty,t_0).$$

(iii) 对任意 $t^*\in(-\infty,+\infty)$, 记 $x^*=x(t^*,t_0,u)$. 由 (ii), 在 $(-\infty,+\infty)$ 上存在 $x(t,t^*,x^*)$, 且由 $x(t^*,t^*,x^*)=x^*$ 及解的唯一性知道

$$x(t,t^*,x^*)=x(t,t_0,u), \quad \forall t\in(-\infty,+\infty). \tag{6.5.22}$$

由 f 的局部 Lipshitz 连续性知道: 存在 $R^*=R(x^*)=R(t^*,t_0,u)>0$, $K^*=K(x^*)=K(t^*,t_0,u)>0$ 使得

$$\|f(x)-f(y)\|\le K^*\|x-y\|, \quad \forall x,y\in B_{R^*}(x^*). \tag{6.5.23}$$

令 $r*=\frac{R^*}{3}$, 由 (i) 得出: 当

$$0<4\delta^*<\min\left(\frac{r^*}{M},\frac{1}{K^*}\right) \tag{6.5.24}$$

时, $x(t,t^*,x^*)$ 满足

$$\|x(t,t^*,x^*)-x^*\|\le r^*, \quad \forall t\in[t^*-4\delta^*,t^*+4\delta^*]. \tag{6.5.25}$$

现在证明: 对任意 $\tau\in[t^*-\delta^*,t^*+\delta^*]=I^*$ 及相应的 $x_\tau=x(\tau,t_0,u)$ 有

$$\text{若 } \|v-x_\tau\|\le r^*, \text{ 则 } \|x(t,\tau,v)-x(t,t_0,u)\|\le 2\|v-x_\tau\|, \quad \forall t\in I^*. \tag{6.5.26}$$

设 $\|v-x_\tau\| \le r^*$. 由 (6.5.22) 知道 $x_\tau = x(\tau, t_0, u) = x(\tau, t^*, x^*)$. 再由 $\tau \in I^*$ 及 (6.5.25) 得出 $\|x_\tau - x^*\| \le r^*$. 因此，当 $x \in B_{r^*}(v)$ 时，有

$$\begin{aligned}\|x - x^*\| &\le \|x - v\| + \|v - x_\tau\| + \|x_\tau - x^*\| \\ &< r^* + r^* + r^* = R^*,\end{aligned} \tag{6.5.27}$$

即 $x \in B_{R^*}(x^*)$. 于是由 (6.5.23) 得出

$$\|f(x) - f(y)\| \le K^*\|x - y\|, \quad x, y \in B_{r^*}(v). \tag{6.5.28}$$

因此，由 (i), 对满足 (6.5.24) 的 $4\delta^*$, 在 $[\tau - 4\delta^*, \tau + 4\delta^*]$ 上存在唯一的 $x(t, \tau, v)$ 满足

$$\|x(t, \tau, v) - v\| \le r^*, \quad \forall t \in [\tau - 4\delta^*, \tau + 4\delta^*].$$

由于 $I^* = [\tau - \delta^*, \tau + \delta^*] \subset [\tau - 4\delta^*, \tau + 4\delta^*]$, 由上式得

$$\|x(t, \tau, v) - v\| \le r^*, \quad \forall t \in I^*, \tag{6.5.29}$$

即 $x(t, \tau, v) \in B_{R^*}(v)$. 再由 (6.5.27) 得出

$$x(t, \tau, v) \in B_{R^*}(x^*). \tag{6.5.30}$$

由于 $x(\tau, \tau, x_\tau) = x_\tau = x(\tau, t^*, x^*)$, 由 (ii) 中常微分方程初值问题解的唯一性知道

$$x(t, \tau, x_\tau) = x(t, t^*, x^*), \quad \forall t \in (-\infty, +\infty), \tag{6.5.31}$$

由此式及 (6.5.25) 得出

$$\|x(t, \tau, x_\tau) - x^*\| \le r^* < R^*, \quad \forall t \in I^*. \tag{6.5.32}$$

由 (6.5.30) 及 (6.5.32), 利用条件 (6.5.23) 得出

$$\|f(x(t, \tau, v)) - f(x(t, \tau, x_\tau))\| \le K^*\|x(t, \tau, v) - x(t, \tau, x_\tau)\|, \quad \forall t \in I^*. \tag{6.5.33}$$

因为

$$x(t,\tau,v)=v+\int_\tau^t f(x(s,\tau,v))ds,\quad \forall t\in I^*,$$

$$x(t,\tau,x_\tau)=x_\tau+\int_\tau^t f(x(s,\tau,x_\tau))ds,\quad \forall t\in I^*,$$

利用 (6.5.33) 得出

$$\begin{aligned}&||x(t,\tau,v)-x(t,\tau,x_\tau)||\\&\le ||v-x_\tau||+\int_\tau^t ||f(x(s,\tau,v))-f(x(s,\tau,x_\tau))||ds\\&\le ||v-x_\tau||+K^*\int_\tau^t ||x(s,\tau,v)-x(s,\tau,x_\tau)||ds\\&=\omega(t),\quad \forall t\in[\tau,t^*+\delta^*].\end{aligned}\tag{6.5.34}$$

于是，由上式得

$$\omega'(t)=K^*||x(t,\tau,v)-x(t,\tau,x_\tau)||\le K^*\omega(t),\quad \forall t\in[\tau,t^*+\delta^*].$$

由此知

$$\frac{d}{dt}[e^{-K^*t}\omega(t)]=e^{-K^*t}[\omega'(t)-K^*\omega(t)]\le 0,\quad \forall t\in[\tau,t^*+\delta^*].$$

此式两端从 τ 到 t 积分得出

$$e^{-K^*t}\omega(t)-e^{-K^*\tau}\omega(\tau)\le 0,\quad \forall t\in[\tau,t^*+\delta^*].$$

利用 (6.5.34), 上式可改写成

$$\omega(t)\le e^{K^*(t-\tau)}\omega(\tau)=e^{K^*(t-\tau)}||v-x_\tau||,\quad \forall t\in[\tau,t^*+\delta^*].$$

由此式及 (6.5.34) 得出

$$||x(t,\tau,v)-x(t,\tau,x_\tau)||\le e^{K^*(t-\tau)}||v-x_\tau||,\quad \forall t\in[\tau,t^*+\delta^*].$$

同理可证

$$||x(t,\tau,v)-x(t,\tau,x_\tau)||\le e^{K^*(\tau-t)}||v-x_\tau||,\quad \forall t\in[t^*-\delta^*,\tau].$$

于是有

$$\|x(t,\tau,v)-x(t,\tau,x_\tau)\| \le e^{K^*\delta^*}\|v-x_\tau\|, \quad \forall t\in I^*.$$

由此式并利用 (6.5.31), (6.5.22) 及 (6.5.24) 得出 (6.5.26).

综上所述，我们证明了如下的命题：

命题 (P) 对任意 $t^*\in(-\infty,+\infty)$, 存在 $r^*>0$, $\delta^*>0$, 使得对任意 $\tau\in I^*=[t^*-\delta^*,t^*+\delta^*]$ 及相应的 $x_\tau=x(\tau,t_0,u)$, 如果 $\|v-x_\tau\|\le r^*$, 则在 I^* 上存在 $x(t,\tau,v)$ 满足

$$\|x(t,\tau,v)-x(t,t_0,u)\|\le 2\|v-x_\tau\|, \quad \forall t\in I^*.$$

对任意 $c>t_0$, 由于开区间集 $G=\{\mathring{\mathrm{I}}^*=(t^*-\delta^*,t^*+\delta^*)|t^*\in[t_0,c]\}$ 构成闭区间 $[t_0,c]$ 的一个开覆盖. 由有限覆盖定理，存在 $[t_0,c]$ 的有限开覆盖 $\{\mathring{\mathrm{I}}_k=(t_k-\delta_k,t_k+\delta_k)|k=1,2,\cdots,m\}\subset G$. 在命题 (P) 中将 t^* 视为 t_k 时，把 t_k 对应的 r^* 记为 $r_k(k=1,2,\cdots,m)$. 不妨设 $t_0\in\mathring{\mathrm{I}}_1=(t_1-\delta_1,t_1+\delta_1)$, $\mathring{\mathrm{I}}_{k-1}$ 的右端点 $t_{k-1}+\delta_{k-1}\in\mathring{\mathrm{I}}_k(k=2,3,\cdots,m)$, $c\in\mathring{\mathrm{I}}_m=(t_m-\delta_m,t_m+\delta_m)$. 只需证明对任意 $\epsilon>0$ 及满足条件

$$0<2^m r<\min(\epsilon,r_1,r_2,\cdots,r_m) \tag{6.5.35}$$

的 r, 当 $\|v-u\|<r$ 时，对 $k=1,2,\cdots,m$ 均有

$$\|x(t,t_0,v)-x(t,t_0,u)\|\le 2^k r, \quad \forall t\in I_k=[t_k-\delta_k,t_k+\delta_k], \tag{6.5.36}$$

则 (iii) 中的结论 (6.5.11) 成立.

因为 $\{\mathring{\mathrm{I}}_k=(t_k-\delta_k,t_k+\delta_k)|k=1,2,\cdots,m\}$ 覆盖 $[t_0,c]$, 由 (6.5.36) 及 (6.5.35) 得出 (6.5.11). 由命题 (P), 对 $\tau=t_0\in I_1$ 及相应的 $x_\tau=x(t_0,u)=u$, 当 $\|v-x_\tau\|=\|v-u\|<r$ 时，在 I_1 上存在 $x(t,\tau,v)=x(t,t_0,v)$ 使得

$$\|x(t,t_0,v)-x(t,t_0,u)\|\le 2\|v-u\|<2r, \quad \forall t\in I_1,$$

这就说明 (6.5.36) 对 $k=1$ 成立. 设 (6.5.36) 对 $k-1(k\geq 2)$ 成立, 即当 $||v-u||<r$ 时有

$$\begin{aligned}&||x(t,t_0,v)-x(t,t_0,u)||\leq 2^{k-1}r,\\&\forall t\in I_{k-1}=[t_{k-1}-\delta_{k-1},t_{k-1}+\delta_{k-1}].\end{aligned}\tag{6.5.37}$$

对 $\tau=t_{k-1}+\delta_{k-1}$ 及相应的 $x(\tau,t_0,u)=x_\tau$, $x(\tau,t_0,v)=x_v$, 由 $\tau\in I_{k-1}$ 及 (6.5.37) 有

$$||x_v-x_\tau||\leq 2^{k-1}r. \tag{6.5.38}$$

又由 $\tau=t_{k-1}+\delta_{k-1}\in I_k$, 根据命题 (P), 当 $||x_v-x_\tau||\leq r_k$ 时, 在 I_k 上存在 $x(t,\tau,x_v)$ 满足

$$||x(t,\tau,x_v)-x(t,t_0,u)||\leq 2||x_v-x_\tau||,\quad \forall t\in I_k.$$

以 (6.5.38) 代入上式右端得

$$||x(t,\tau,x_v)-x(t,t_0,u)||\leq 2^k r,\quad \forall t\in I_k. \tag{6.5.39}$$

由于 $x(\tau,\tau,v)=x_v=x(\tau,t_0,v)$, 由解的唯一性得

$$x(t,\tau,v)=x(t,t_0,v),\quad \forall t\in(-\infty,+\infty).$$

以此式代入 (6.5.39) 得出 (6.5.36).

对 $c<t_0$ 的情形可以类似证明.

第七章　临界点理论中的极大极小原理及其在拟线性椭圆方程中的应用

在第六章已经知道，微分方程边值问题的弱解就是相应泛函的临界点；在线性方程情形其弱解使相应泛函取极小值；在非线性方程情形，其相应泛函可能既没有上界也没有下界. 为了研究非线性方程边值问题解的存在，本章介绍临界点存在的极小极大原理. 极小极大原理不仅给出泛函的临界点，而且对相应的临界值作了估计，从而成为研究非线形微分方程边值问题的重要技巧.

7.1　伪梯度向量场

设 E 是 Banach 空间，泛函 $I \in C(E,R)$. 以

$$K = \{u \in E | I'(u) = 0\}$$

表示泛函 I 的临界点集. 以

$$K_c = \{u \in K | I(u) = c\} = \{u \in E | I'(u) = 0, I(u) = c\}$$

表示泛函 I 的临界值为 c 的临界点集，并称

$$I_c = \{u \in E | I(u) \le c\}$$

为泛函 I 的水平集.

研究泛函临界点存在的方法是考察水平集 I_c 随 c 变化时的拓扑结构的变化. 因为在一定条件下，如果 c 从 c_1 连续增大到 $c_2 (c_1 < c_2)$ 没有经过 I 的临界值，I_c 的拓扑结构不发生变化，即 I_{c_1} 可以通过拓扑变换 (形变收缩) 成为 I_{c_2}; 如果 c 从 c_1 增大到 c_2 跨过 I 的临界值，I_{c_1} 与 I_{c_2} 会有不同的拓扑结构. 这就是下一节要介绍的形变定理. 由形变定理不难得出临界点存在的极小极大

原理. 为了建立形变定理，我们先介绍 Palais 引进的伪梯度向量场.

定义 设 $I \in C^1(E,R)$.

(i) 如果 $u,v \in E$ 满足条件

1° $||v|| \leq 2||I'(u)||$;

2° $\langle I'(u),v\rangle \geq ||I'(u)||^2$, $\langle I'(u),v\rangle$ 表示泛函 $I'(u)$ 在 v 处的值.

则称 v 是 I 在 u 处的 **伪梯度向量**;

(ii) 设 $N \subset E$. 如果对所有 $u \in N$, v 是 I 在 u 处的伪梯度向量，则称 v 是 I 在 N 上的 **伪梯度向量**.

(iii) 如果 $S \subset E$, $\Phi \in C(S,E)$, 且对任意 $u \in S$, $\Phi(u)$ 是 I 在 u 处的伪梯度向量，则称 Φ 为 I 在 S 上的 **伪梯度向量场**.

为了建立伪梯度向量场的存在定理，需要用到下面的引理.

引理 7.1.1 设 E 是 Banach 空间， $S \subset E$, 对任意 $u \in E$, 记

$$\rho(u) = \mathrm{dist}(u,S) = \inf_{v\in S}||v-u|| \tag{7.1.1}$$

为 u 到 S 的距离，则 $\rho \in C^{0,1}(E,R)$ 且有

$$|\rho(u)-\rho(v)| \leq ||u-v||, \quad \forall u,v \in E. \tag{7.1.2}$$

证 对 $u \in E$, 由 (7.1.1) 知道，对任意 $\epsilon > 0$, 存在 $w \in S$ 使得

$$||w-u|| < \rho(u)+\epsilon.$$

于是，对 $v \in E$, 由 (7.1.1) 及上式有

$$\begin{aligned}\rho(v) &\leq ||w-v|| \leq ||w-u||+||u-v|| \\ &< \rho(u)+\epsilon+||u-v||,\end{aligned}$$

即

$$\rho(v)-\rho(u) < ||u-v||+\epsilon.$$

因为 ϵ 为任意正数，由上式得出

$$\rho(v)-\rho(u)\le ||u-v||.$$

同理可证

$$\rho(u)-\rho(v)\le ||u-v||.$$

合并最后两个不等式得出 (7.1.2).

定理 7.1.2 设 $I\in C^1(E,R)$, $\tilde{E}=E\backslash K$. 如果 $I\ne$const, 则存在 I 在 $\tilde{E}$ 上的局部 Lipschitz 连续的伪梯度向量场 $\Phi:\tilde{E}\to E$. 如果 I 为偶泛函，则可选取 Φ 为奇算子.

证 对任意 $u\in\tilde{E}$, 由于 $I'(u)\ne 0$, 因此

$$\frac{2}{3}||I'(u)||<||I'(u)||=\sup_{v\in E,||v||=1}\langle I'(u),v\rangle. \tag{7.1.3}$$

从而存在 $v\in E$, $||v||=1$, 使得

$$\langle I'(u),v\rangle>\frac{2}{3}||I'(u)||. \tag{7.1.4}$$

于是， $w=\dfrac{3}{2}||I'(u)||v$ 满足

$$||w||=\frac{3}{2}||I'(u)||<2||I'(u)||, \tag{7.1.5}$$

$$\langle I'(u),w\rangle>||I'(u)||^2, \tag{7.1.6}$$

即 w 为 I 在 u 处的伪梯度向量. 因为 $I\in C^1(E,R)$, 即 I' 在 u 处连续，由 (7.1.5) 及 (7.1.6) 知道：存在 u 的开邻域 N_u 使得

$$||w||<2||I'(v)||,\quad \forall v\in N_u, \tag{7.1.7}$$

$$\langle I'(v),w\rangle>||I'(v)||^2,\quad \forall v\in N_u, \tag{7.1.8}$$

即 w 是 I 在 N_u 上的伪梯度向量. 所有这样的邻域 $\{N_u\}_{u\in\tilde{E}}$ 成为 $\tilde{E}$ 的一个开覆盖；因为 $\tilde{E}$ 是仿紧空间 (见附录 4), 因而存在 $\tilde{E}$

的局部有限加细开覆盖 $\{N_{u_\alpha}|\alpha\in\Delta\}$, Δ 是一个指标集. 考虑距离函数

$$\rho_\alpha(x)=\mathrm{dist}(x,E\backslash N_{u_\alpha}),a\in\Delta. \tag{7.1.9}$$

显然有

$$\begin{aligned}&\rho_\alpha(x)>0,\quad\forall x\in N_{u_\alpha},\\&\rho_\alpha(x)=0,\quad\forall x\in E\backslash N_{u_\alpha}.\end{aligned} \tag{7.1.10}$$

由引理 7.1.1 知道, $\rho_\alpha(x)\in C^{0,1}(E,R)$, 且有

$$|\rho_\alpha(x)-\rho_\alpha(y)|\le||x-y||,\quad\forall x,y\in E. \tag{7.1.11}$$

令

$$\rho(x)=\sum_{\alpha\in\Delta}\rho_\alpha(x),\quad\forall x\in E. \tag{7.1.12}$$

对任意 $u\in\tilde{E}$, 由于 $\{N_{u_\alpha}|\alpha\in\Delta\}$ 是 $\tilde{E}$ 的局部有限覆盖, 因而存在 $R_u>0$, 使得 $B_{R_u}(u)$ 只与有限个 N_{u_α} 相交. 设 $B_{R_u}(u)$ 只与 $N_{u_1},N_{u_2},\cdots,N_{u_m}$ 相交. 这里 $m=m(R_u)=m(u)$. 因此, 由 (7.1.12) 及 (7.1.10) 得出

$$\rho(x)=\sum_{\alpha\in\Delta}\rho_\alpha(x)=\sum_{\alpha=1}^{m}\rho_\alpha(x)>0,\quad\forall x\in B_{R_u}(u). \tag{7.1.13}$$

由此式及 (7.1.11) 又有

$$\begin{aligned}|\rho(x)-\rho(y)|&\le\sum_{\alpha=1}^{m}|\rho_\alpha(x)-\rho_\alpha(y)|\\&\le m||x-y||,\quad\forall x,y\in B_{R_u}(u),\end{aligned} \tag{7.1.14}$$

即 $\rho(x)$ 在 $\tilde{E}$ 上满足局部 Lipschitz 条件. 再令

$$\nu_\alpha=\frac{\rho_\alpha(x)}{\rho(x)},\quad\forall x\in\tilde{E}. \tag{7.1.15}$$

由 (7.1.10) 及 (7.1.11) 得出

$$\nu_\alpha(x)=0,\quad\forall x\in E\backslash N_{u_\alpha}, \tag{7.1.16}$$

$$0 < \nu_\alpha \leq 1, \quad \sum_{\alpha \in \Delta} \nu_\alpha(x) = 1, \quad \forall x \in \tilde{E}. \tag{7.1.17}$$

现在证明 $\nu_\alpha(x)$ 在 $\tilde{E}$ 上也满足局部 Lipschitz 条件. 由 (7.1.13) 有

$$\rho(u) = \sum_{\alpha=1}^{m} \rho_\alpha(u) > 0.$$

对于正数

$$R = R(u) = \min\left(R_u, \frac{\rho(u)}{2m}\right), \tag{7.1.18}$$

由于

$$B_R(u) \subset B_{R_u}(u) \tag{7.1.19}$$

及 (7.1.14) 有

$$\begin{aligned} \rho(u) - \rho(x) &\leq |\rho(x) - \rho(u)| \leq m\|x - u\| \\ &< mR \leq \frac{1}{2}\rho(u), \quad \forall x \in B_R(u). \end{aligned}$$

由此得

$$\rho(x) > \frac{1}{2}\rho(u), \quad \forall x \in B_R(u). \tag{7.1.20}$$

由 (7.1.15), (7.1.20), (7.1.11), (7.1.7) 及 (7.1.14) 得出: 对任意 $x, y \in B_R(u)$ 有

$$\begin{aligned} |\nu_\alpha(x) - \nu_\alpha(y)| &= \left|\frac{\rho_\alpha(x)}{\rho(x)} - \frac{\rho_\alpha(y)}{\rho(y)}\right| \\ &= \frac{1}{\rho(x)}\left|\rho_\alpha(x) - \rho_\alpha(y) - \frac{\rho_\alpha(y)}{\rho(y)}[\rho(x) - \rho(y)]\right| \\ &\leq \frac{2}{\rho(u)}\{|\rho_\alpha(x) - \rho_\alpha(y)| + \nu_\alpha(y)|\rho(x) - \rho(y)|\} \\ &\leq \frac{2}{\rho(u)}\{\|x - y\| + m\|x - y\|\} = K\|x - y\|, \end{aligned} \tag{7.1.21}$$

其中 $K = K(u) = \dfrac{2(m+1)}{\rho(u)}$. 此式说明 $\nu_\alpha(x)$ 在 $\tilde{E}$ 上满足局部 Lipschitz 条件.

记泛函 I 在 N_{u_α} 上的伪梯度向量为 $w_\alpha \in E$, 并令

$$\Phi(x) = \sum_{\alpha\in\Delta} \nu_\alpha(x) w_\alpha, \quad \forall x \in \tilde{E}. \tag{7.1.22}$$

今证 Φ 在 $\tilde{E}$ 上满足局部 Lipschitz 条件. 对 $u \in \tilde{E}$, 由于 B_{R_u} 只与 $N_{u_1}, N_{u_2}, \cdots, N_{u_m}$ 相交, 由 (7.1.22), (7.1.16) 知道

$$\Phi(x) = \sum_{\alpha=1}^{m} \nu_\alpha(x) w_\alpha, \quad \forall x \in B_{R_u}(u). \tag{7.1.23}$$

由此式及 (7.1.21) 得出

$$\begin{aligned}||\Phi(x) - \Phi(y)|| &\le \sum_{\alpha=1}^{m} |\nu_\alpha(x) - \nu_\alpha(y)|\, ||w_\alpha|| \\ &\le K||x-y|| \sum_{\alpha=1}^{m} ||w_\alpha||, \quad \forall x, y \in B_{R_u}(u).\end{aligned}$$

记 $K_1 = K \sum\limits_{\alpha=1}^{m} ||w_\alpha|| = K_1(u)$, 则上式可写成

$$||\Phi(x) - \Phi(y)|| \le K_1 ||x-y||, \quad \forall x, y \in B_{R_u}(u). \tag{7.1.24}$$

此式说明 Φ 在 $\tilde{E}$ 上是局部 Lipshitz 连续的.

再验证 Φ 是 I 在 $\tilde{E}$ 上的伪梯度向量场. 由于 w_α 是 I 在 N_{u_α} 上的伪梯度向量, 即 w_α 满足

$$||w_\alpha|| < 2||I'(x)||, \quad \forall x \in N_{u_\alpha},$$

$$\langle I'(x), w_\alpha \rangle > ||I'(x)||^2, \quad \forall x \in N_{u_\alpha}.$$

因此, 由 (7.1.22) 及 (7.1.17) 得出

$$||\Phi(x)|| \le \sum_{\alpha\in\Delta} \nu_\alpha(x) ||w_\alpha|| \le 2 \sum_{\alpha\in\Delta} \nu_\alpha(x) ||I'(x)|| = 2||I'(x)||, \tag{7.1.25}$$

$$\langle I'(x), \Phi(x) \rangle = \sum_{\alpha\in\Delta} \nu_\alpha(x) \langle I'(x), w_\alpha \rangle \ge \sum_{\alpha\in\Delta} \nu_\alpha(x) ||I'(x)||^2 = ||I'(x)||^2. \tag{7.1.26}$$

这两个不等式说明 Φ 是 I 在 $\tilde{E}$ 上的伪梯度向量场.

如果 I 为偶泛函，令

$$\tilde{\Phi}(x)=\frac{1}{2}[\Phi(x)-\Phi(-x)],\quad \forall x\in\tilde{E}. \tag{7.1.27}$$

则显然 $\tilde{\Phi}:\tilde{E}\to E$ 是一个奇算子. 今证明 $\tilde{\Phi}$ 仍是局部 Lipschitz 连续的伪梯度向量场. 对任意 $u\in\tilde{E}$, 由 I 为偶泛函知道 $-u\in\tilde{E}$. 因为 Φ 是局部 Lipschitz 连续的，存在 $R_1=R_1(u)>0$, $R_2=R_2(-u)>0$ 及 $K_1=K_1(u)>0$, $K_2=K_2(-u)>0$ 使得

$$||\Phi(x)-\Phi(y)||\le K_1||x-y||,\quad \forall x,y\in B_{R_1}(u). \tag{7.1.28}$$

$$||\Phi(x)-\Phi(y)||\le K_2||x-y||,\quad \forall x,y\in B_{R_1}(-u). \tag{7.1.29}$$

令 $R=R(u)=\min(R_1,R_2)$, $K=K(u)=\max(K_1,K_2)$. 则当 $x,y\in B_R(u)$ 时，$(-x)$, $(-y)\in B_R(-u)$. 由 (7.1.27)~(7.1.29) 得出

$$\begin{aligned}
&||\tilde{\Phi}(x)-\tilde{\Phi}(y)||\\
\le&\frac{1}{2}||\Phi(x)-\Phi(y)||+\frac{1}{2}||\Phi(-x)-\Phi(-y)||\\
\le&\frac{1}{2}K_1||x-y||+\frac{1}{2}K_2||x-y||\\
\le&\frac{1}{2}K||x-y||,\quad \forall x,y\in B_R(u),
\end{aligned}$$

即 $\tilde{\Phi}$ 是局部 Lipschitz 连续的. 对 I 的 Fréchet 导数 $I'(u)$, 由 (6.1.3) 有

$$I(u+\phi)=I(u)+\langle I'(u),\phi\rangle+o(||\phi||),\quad \forall u,\phi\in E. \tag{7.1.30}$$

因而又有

$$I(-u-\phi)=I(-u)+\langle I'(-u),-\phi\rangle+o(||\phi||),\quad \forall u,\phi\in E. \tag{7.1.31}$$

由于 I 是偶泛函，于是

$$I(u+\phi)=I(-u-\phi),\quad I(u)=I(-u),\quad \forall u,\phi\in E.$$

由此，比较 (7.1.30) 及 (7.1.31) 得出

$$\langle I'(u),\phi\rangle=\langle I'(-u),-\phi\rangle=\langle -I'(-u),\phi\rangle,\quad \forall u,\phi\in E.$$

从而有

$$I'(u)=-I'(-u),\quad \forall u,\phi\in E.$$

利用最后这两个等式，由 (7.1.27), (7.1.25) 及 (7.1.26) 得出

$$\begin{aligned}||\tilde{\Phi}(u)||&\le \frac{1}{2}||\Phi(u)||+\frac{1}{2}||\Phi(-u)||\\&\le ||I'(u)||+||I'(-u)||\\&\le ||I'(u)||+||I'(u)||=2||I'(u)||,\end{aligned}\tag{7.1.32}$$

$$\begin{aligned}\langle I'(u),\tilde{\Phi}(u)\rangle&=\frac{1}{2}\langle I'(u),\Phi(u)\rangle-\frac{1}{2}\langle I'(u),-\Phi(-u)\rangle\\&=\frac{1}{2}\langle I'(u),\Phi(u)\rangle+\frac{1}{2}\langle I'(-u),-\Phi(-u)\rangle\\&\ge\frac{1}{2}||I'(u)||^2+\frac{1}{2}||I'(-u)||^2=2||I'(u)||^2.\end{aligned}\tag{7.1.33}$$

这就证明了 $\tilde{\Phi}$ 是 I 在 $\tilde{E}$ 上的伪梯度向量场.

7.2 形 变 定 理

以后均用 E 表示 (实)Banach 空间.

定义 1 设 $I\in C^1(E,R)$, $c\in R$. 如果序列 $\{u_k\}\subset E$ 满足条件

$$I(u_k)\to c,\quad 当k\to\infty,\tag{7.2.1}$$

$$I'(u_k)\to 0,\quad 在E^*中\quad 当k\to\infty,\tag{7.2.2}$$

则称 $\{u_k\}$ 为 I 关于 c 的临界序列.

定义 2 设 $I\in C^1(E,R)$. 如果满足条件

$$\{I(u_k)\}\quad 有界,\tag{7.2.3}$$

$$I'(u_k) \to 0, \quad 在\ E^* 中 \quad 当 k \to \infty \tag{7.2.4}$$

的每一序列 $\{u_k\}(u_k \in E, k = 1, 2, \cdots)$ 在 E 中都是列紧集，则称泛函 I 满足 Palais-Smale 条件 (简称 P-S 条件).

引理 7.2.1 设 $I \in C^1(E, R)$. 如果 I 满足 P-S 条件，且 I 关于 c 有临界序列，则 c 为 I 的临界值.

证 如果 I 关于 c 有临界序列，即存在满足条件 (7.2.1) 及 (7.2.2) 的序列 $\{u_k\}$. 显然，此序列 $\{u_k\}$ 也满足条件 (7.2.3) 及 (7.2.4). 再由 I 满足 P-S 条件知道，$\{u_k\}$ 是 E 中的列紧集. 从而存在收敛的子序列 $\{u_{k_j}\} \subset \{u_k\}$, 设

$$\lim_{j \to \infty} u_{k_j} = u. \tag{7.2.5}$$

由于 $\{u_k\}$ 的子序列也满足条件 (7.2.1) 及 (7.2.2), 即

$$\begin{aligned} &I(u_{k_j}) \to c, \quad 当 j \to \infty, \\ &I'(u_{k_j}) \to 0, \quad 在 E^* 中 \quad 当 j \to \infty. \end{aligned} \tag{7.2.6}$$

因为 $I \in C^1(E, R)$, 由 I 及 I' 的连续性及 (7.2.5) 得出

$$\begin{aligned} &I(u_{k_j}) \to I(u), \quad 当 j \to \infty, \\ &I'(u_{k_j}) \to I'(u), \quad 在 E^* 中 \quad 当 j \to \infty. \end{aligned} \tag{7.2.7}$$

比较 (7.2.6) 及 (7.2.7) 得出

$$I(u) = c, \quad I'(u) = 0.$$

此两式表明 c 是 I 的临界值.

引理 7.2.2 设 Ω 是 R^n 中的有界区域. 函数 $f(x, u)$ 在 $\Omega \times R$ 上满足 Carathéodory 条件，且有

$$|f(x, u)| \le a(x) + b|u|^r, \quad \forall (x, u) \in \Omega \times R, \tag{7.2.8}$$

其中 $a(x) \in L^{\frac{r+1}{r}}(\Omega)$, b 为正整数. 常数 r 满足

$$0 < r < \begin{cases} \dfrac{n+2}{n-2}, & 当 n > 2, \\ +\infty, & 当 n \le 2. \end{cases} \tag{7.2.9}$$

记

$$F(x,u)=\int_0^u f(x,t)dt,$$

$$I(u)=\frac{1}{2}\int_\Omega |Du|^2dx-\int_\Omega F(x,u)dx. \tag{7.2.10}$$

如果序列 $\{u_k\}$ 是 $E=W_0^{1,2}(\Omega)$ 中的有界序列，且满足条件

$$I'(u_k)\to 0,\quad 在E^*中\quad 当k\to\infty, \tag{7.2.11}$$

则 $\{u_k\}$ 为 E 中的列紧集.

证 如果 $\{u_k\}$ 是 $E=W_0^{1,2}(\Omega)$ 中的有界序列，设

$$||u_k||\le M(常数),\quad k=1,2,\cdots \tag{7.2.12}$$

由定理 6.3.2 知道：对 E 上的泛函

$$J(u)=\int_\Omega F(x,u)dx, \tag{7.2.13}$$

$J':E\to E^*$ 是连续紧算子，其中

$$\langle J'(u),\phi\rangle=\int_\Omega f(x,u)dx,\quad \forall\phi\in E. \tag{7.2.14}$$

因此，对 E 中的有界序列 $\{u_k\}$ 存在它的子序列 $\{u_{k_j}\}\subset\{u_k\}$ 及 $u\in E$, 使得

$$J'(u_{k_j})\to J'(u),\quad 在\ E^*\ 中\quad (当\ j\to\infty). \tag{7.2.15}$$

由 (7.2.10) 及 (7.2.13) 有

$$I(u)=\frac{1}{2}\int_\Omega |Du|^2dx-J(u),\quad \forall u\in E.$$

从而得出

$$\langle I'(u),\phi\rangle=\int_\Omega Du\cdot D\phi dx-\langle J'(u),\phi\rangle,\quad \forall\phi\in E.$$

由此推出：对任意 $\phi \in E$ 有

$$\langle I'(u_{k_i}) - I'(u_{k_j}), \phi\rangle$$

$$= \int_\Omega (Du_{k_i} - Du_{k_j}) \cdot D\phi dx - \langle J'(u_{k_i}) - J'(u_{k_j}), \phi\rangle, \quad \forall \phi \in E.$$

此式中取 $\phi = u_{k_i} - u_{k_j}$, 得出

$$\langle I'(u_{k_i}) - I'(u_{k_j}), u_{k_i} - u_{k_j}\rangle$$

$$= \int_\Omega |D(u_{k_i} - Du_{k_j})|^2 dx - \langle J'(u_{k_i}) - J'(u_{k_j}), u_{k_i} - u_{k_j}\rangle.$$

由此式及 (7.2.12), (7.2.11), (7.2.15) 得出

$$||u_{k_i} - u_{k_j}||_E^2 = \int_\Omega |D(u_{k_i} - u_{k_j})|^2 dx$$

$$\leq (||I'(u_{k_i})|| + ||I'(u_{k_j})||)||u_{k_i} - u_{k_j}||$$

$$+(||J'(u_{k_i}) - J'(u_{k_j})||)||u_{k_i} - u_{k_j}||$$

$$\leq 2M(||I'(u_{k_i})|| + ||I'(u_{k_j})|| + ||J'(u_{k_i}) - J'(u_{k_j})||)$$

$$\to 0, \quad 当\ i \to \infty, \quad j \to \infty.$$

这就证明了 $\{u_{k_j}\}$ 是 E 中的收敛序列，即原序列 $\{u_k\}$ 是 E 中的列紧集.

注 1 对满足引理 7.2.2 的条件的 $E = W_0^{1,2}(\Omega)$ 上的泛函 I, 如果满足条件 (7.2.3) 及 (7.2.4) = (7.2.11) 的每一序列 $\{u_k\}(u_k \in E, k = 1, 2, \cdots)$ 都是 E 中的有界集，则泛函 I 满足 P-S 条件.

引理 7.2.3 设 $I \in C^1(E, R)$, $c \in R$. 如果 I 关于 c 没有临界序列，则存在 $b > 0$ 及 $\epsilon > 0$ 使得

$$||I'(x)|| \geq b, \quad \forall x \in I_{c+\epsilon} \backslash I_{c-\epsilon}. \tag{7.2.16}$$

证 用反证法. 假设使 (7.2.16) 成立的 b, ϵ 不存在，则对任意正整数 k, 当 $b = \epsilon = \frac{1}{k}$ 时， (7.2.16) 不成立，即必存在

$$x_k \in I_{c+\frac{1}{k}} \backslash I_{c-\frac{1}{k}}, \tag{7.2.17}$$

使得

$$||I'(x_k)|| < \frac{1}{k}. \tag{7.2.18}$$

由 (7.2.17) 有

$$c - \frac{1}{k} < I'(x_k) \le c + \frac{1}{k}. \tag{7.2.19}$$

由 (7.2.19) 及 (7.2.18) 得出

$$I(x_k) \to c, \quad 当 k \to \infty,$$

$$I'(x_k) \to 0, \quad 在\ E^*\ 中\quad 当\ k \to \infty.$$

此两式说明 $\{x_k\}$ 是 I 关于 c 的临界序列，与定理假设 I 关于 c 没有临界序列相矛盾.

引理 7.2.4 设 $S \subset E$, $x \in E$. 以

$$\rho(x) = \mathrm{dist}(x, S) = \inf_{y \in S} ||y - x|| \tag{7.2.20}$$

表示 x 到 S 的距离. 如果 $\rho(x) = 0$, 则 $x \in \bar{S}$.

证 由定义 (7.2.20), 对任意正整数 n, 存在 $y_n \in S$, 使得

$$\rho(x) \le ||y_n - x|| < \rho(x) + \frac{1}{n}.$$

如果 $\rho(x) = 0$, 则上式变为

$$0 \le ||y_n - x|| < \frac{1}{n}.$$

由此知

$$y_n \to x, \quad 在\ E\ 中\quad (当\ n \to \infty).$$

而序列 $\{y_n\} \subset S$, 故由上式知 $x \in \bar{S}$.

引理 7.2.5 设 $I \in C^1(E, R)$, $c \in R$. 如果 I 关于 c 没有临界序列，则存在 $\epsilon_0 > 0$, 使得对于满足 $0 < \epsilon < \bar{\epsilon} \le \epsilon_0$ 的任意 ϵ 及 $\bar{\epsilon}$, 存在局部 Lipschitz 连续的算子 $\psi = \psi_{\epsilon, \bar{\epsilon}} : E \to E$, 且有

$$||\psi(x)|| \le 1, \quad \forall x \in E. \tag{7.2.21}$$

如果 I 是偶泛函，则 ψ 为奇算子.

证 令

$$J_\epsilon=\{x\in E|c-\epsilon\le I(x)\le c+\epsilon\}. \tag{7.2.22}$$

先证明对 I 的临界点集 K 存在 $\epsilon_0>0$, 使得

$$K\bigcap J_{\epsilon_0}=\varnothing. \tag{7.2.23}$$

用反证法. 设

$$K\bigcap J_\epsilon\ne\varnothing,\quad \forall\epsilon>0.$$

因此，对任意正整数 m 有

$$K\bigcap J_{\frac{1}{m}}\ne\varnothing,$$

即存在 $x_m\in K\bigcap J_{\frac{1}{m}}$. 因此

$$I'(x_m)=0,\quad c-\frac{1}{m}\le I(x_m)\le c+\frac{1}{m},$$

由此得出

$$I'(x_m)=0,\quad \forall m,\quad I(x_m)\to c,\quad 当m\to\infty,$$

即 $\{x_m\}$ 是 I 关于 c 的临界序列，与假设 I 关于 c 没有临界序列相矛盾.

对任意满足 $0<\epsilon<\bar\epsilon\le\epsilon_0$ 的 ϵ 及 $\bar\epsilon$, 由 (7.2.22) 及 (7.2.23) 知道

$$J_\epsilon\subset J_{\bar\epsilon}\subset J_{\epsilon_0},$$
$$K\bigcap J_{\bar\epsilon}=\varnothing. \tag{7.2.24}$$

因此，集合

$$A=E\backslash J_{\bar\epsilon},\quad B=J_\epsilon \tag{7.2.25}$$

满足

$$\bar A\bigcap\bar B=\varnothing. \tag{7.2.26}$$

由引理 7.2.4 及 (7.2.26), 用反证法易得

$$d(x) = \mathrm{dist}(x, A) + \mathrm{dist}(x, B) > 0, \quad \forall x \in E. \tag{7.2.27}$$

因此，函数

$$g(x) = g_{\epsilon,\bar{\epsilon}}(x) = \frac{\mathrm{dist}(x, A)}{d(x)}, \quad \forall x \in E \tag{7.2.28}$$

有意义，且满足

$$0 \le g(x) \le 1, \quad \forall x \in E, \tag{7.2.29}$$

$$g(x) = \begin{cases} 0, & x \in A, \\ 1, & x \in B. \end{cases} \tag{7.2.30}$$

现在来证明函数 $g : E \to R$ 是局部 Lipschitz 连续的. 对任意 $x, y \in E$, 由 (7.2.30) 及引理 7.1.1 得出

$$\begin{aligned} &|d(x) - d(y)| \\ &\le |\mathrm{dist}(x, A) - \mathrm{dist}(y, A)| + |\mathrm{dist}(x, B) - \mathrm{dist}(y, B)| \\ &\le 2||x - y||. \end{aligned} \tag{7.2.31}$$

对任意 $u \in E$, 取 $R_1 = R(u) = \frac{1}{4}d(u)$, 由上式得

$$\begin{aligned} d(u) - d(x) &\le |d(x) - d(u)| \\ &\le 2||x - u|| < 2R_1 = \frac{1}{2}d(u), \quad \forall x \in B_{R_1}(u), \end{aligned}$$

由此得知

$$d(x) > \frac{1}{2}d(u), \quad \forall x \in B_{R_1}(u). \tag{7.2.32}$$

由 (7.2.28) 及 (7.2.27), 对任意 $x, y \in E$ 有

$$\begin{aligned} g(x) - g(y) &= \frac{\mathrm{dist}(x, A)}{d(x)} - g(y) \\ &= \frac{\mathrm{dist}(x, A) - \mathrm{dist}(y, A)}{d(x)} - g(y)\frac{d(x) - d(y)}{d(x)}. \end{aligned}$$

根据引理 7.1.1 及 (7.2.29), (7.2.31), (7.2.32), 由上式得出

$$|g(x)-g(y)| \le \frac{||x-y||}{d(x)}+\frac{2||x-y||}{d(x)} \le \frac{6}{d(u)}||x-y||, \quad \forall x,y \in B_{R_1}(u). \tag{7.2.33}$$

这就证明了 $g: E \to R$ 是局部 Lipschitz 连续的.

再令

$$\zeta(t)=\begin{cases} 1, & \text{当 } 0 \le t \le 1, \\ \dfrac{1}{t}, & \text{当 } t \ge 1, \end{cases} \tag{7.2.34}$$

则有

$$|\zeta(t)-\zeta(t')| \le |t-t'|, \quad \forall t,t' \in [0,\infty). \tag{7.2.35}$$

最后令

$$\psi(x)=g(x)\zeta(||\Phi(x)||)\Phi(x), \tag{7.2.36}$$

其中 $\Phi: \tilde{E} \to E$ 是定理 7.1.2 得出的 I 在 $\tilde{E}$ 上的伪梯度向量场. 先说明 (7.2.36) 定义的 $\psi=\psi_{\epsilon,\bar{\epsilon}}$ 是 $E \to E$ 的算子. 当 $x \in \tilde{E}=E\backslash K$ 时, $\psi(x)$ 在 x 处显然有确定的值; 而当 $x \in K$ 时, 由 (7.2.24), (7.2.25) 及 (7.2.30) 得出 $g(x)=0$, 从而可定义 $\psi(x)=0$. 由 (7.2.29) 及 (7.2.25) 知道, 由 (7.2.36) 定义的算子 ψ 满足 (7.2.21). 还需证明算子 ψ 是局部 Lipschitz 连续的. 由定理 7.1.2, $\Phi: \tilde{E} \to E$ 是局部 Lipshitz 连续的. 因而对任意 $u \in \tilde{E}=E\backslash K$, 存在 $R_2=R_2(u)>0$, $K_2=K_2(u)>0$, 使得

$$||\Phi(x)-\Phi(y)|| \le K_2||x-y||, \quad \forall x,y \in B_{R_2}(u). \tag{7.2.37}$$

由此又得出

$$\begin{aligned} ||\Phi(x)|| &\le ||\Phi(x)-\Phi(u)||+||\Phi(u)|| \\ &\le K_2||x-u||+||\Phi(u)|| \\ &\le K_2R_2+||\Phi(u)||=C(u) \\ &= \text{const.}, \quad \forall x \in B_{R_2}(u). \end{aligned} \tag{7.2.38}$$

由等式 (7.2.36) 得出

$$\begin{aligned}\psi(x)-\psi(y)=&[g(x)-g(y)]\zeta(\|\Phi(x)\|)\Phi(x)\\&+g(y)[\zeta(\|\Phi(x)\|)-\zeta(\|\Phi(y)\|)]\Phi(x)\\&+g(y)\zeta(\|\Phi(y)\|)[\Phi(x)-\Phi(y)].\end{aligned}\tag{7.2.39}$$

取 $R=R(u)=\min(R_1,R_2)$, 则对任意 $x,y\in B_R(u)$, 由 (7.2.39), (7.2.33), (7.2.34), (7.2.29), (7.2.35),(7.2.38) 及 (7.2.37) 得出

$$\begin{aligned}&\|\psi(x)-\psi(y)\|\\&\le\frac{6}{d(u)}\|x-y\|+|\ \|\Phi(u)\|-\|\Phi(y)\|\ |C(u)+\|\Phi(x)-\Phi(y)\|\\&\le\frac{6}{d(u)}\|x-y\|+C(u)\|\Phi(x)-\Phi(y)\|+K_2\|x-y\|\\&\le\left[\frac{6}{d(u)}+K_2C(u)+K_2\right]\|x-y\|,\quad\forall x,y\in B_R(u).\end{aligned}$$

这就证明了：对 $u\in\tilde{E}$, 存在 $R=R(u)=\min(R_1,R_2)$, $K=K(u)=\dfrac{6}{d(u)}+K_2C(u)+K_2$ 使得

$$\|\psi(x)-\psi(y)\|\le K\|x-y\|,\quad\forall x,y\in B_R(u).$$

对 $u\in K$, 由 (7.2.24) 及 (7.2.25) 得出 $u\in A$, 再由 I 的连续性及 (7.2.22), (7.2.24) 知道 A 是开集，因而存在 $R=R(u)>0$, 使得

$$B_R(u)\subset A.$$

因此，由 (7.2.30) 及 (7.2.36) 得出

$$\psi(x)=0,\quad\forall x\in B_R(u).$$

从而对任意正数 K 均有

$$\|\psi(x)-\psi(y)\|\le K\|x-y\|,\quad\forall x,y\in B_R(u).$$

这就证明了 $\psi: E\to E$ 是局部 Lipschitz 连续的.

如果 I 是偶泛函, 则集合 A 与 B 都是关于 E 中零元素对称的集合. 因而 $g(x)$ 为偶函数; 而由定理 7.1.2, 可选取 Φ 为奇算子. 于是, 对任意 $x\in E$ 有

$$\begin{aligned}\psi(-x) &= g(-x)\zeta(\|\Phi(-x)\|)\Phi(-x)\\ &= g(x)\zeta(\|-\Phi(x)\|)[-\Phi(x)]\\ &= -g(x)\zeta(\|\Phi(x)\|)\Phi(x) = -\psi(x),\end{aligned}$$

即 ψ 为奇算子.

定理 7.2.6(形变定理) 设 $I\in C^1(E,R)$, $c\in R$. 如果 I 关于 c 没有临界序列, 则存在 $\tau>0$, 使得: 对任意 $0<\epsilon<\bar\epsilon\le\tau$, 存在满足下列条件的函数 $\eta=\eta_{\epsilon,\bar\epsilon}\in C([0,1]\times E,E)$:

1° $\eta(0,u)=u$;

2° $I(\eta(t,u))$ 关于 t 是单调减函数. 特别地有

$$I(\eta(t,u))\le I(u),\quad \forall t\in[0,1];$$

3° $\eta(t,u)=u$ 当 $I(u)\notin[c-\bar\epsilon,c+\bar\epsilon]$, $t\in[0,1]$;

4° $\eta(t,\cdot)$ 是 $E\to E$ 的同胚 (对任意取定的 $t\in[0,1]$);

5° $\|\eta(t,u)-u\|\le 1$, $\forall(t,u)\in[0,1]\times E$;

6° $\eta(1,I_{c+\epsilon})\subset I_{c-\epsilon}$;

7° 如果 $I(u)$ 为偶泛函, 则 $\eta(t,u)$ 对 u 为奇算子 (t 取定时).

证 由引理 7.2.3, 存在 $b>0$ 及 $\epsilon_1>0$ 使得

$$\|I'(x)\|\ge b,\quad \forall x\in I_{c+\epsilon_1}\backslash I_{c-\epsilon_1}. \tag{7.2.40}$$

再由引理 7.2.5, 存在 $\epsilon_0>0$, 使得当

$$0<\epsilon<\bar\epsilon=\min\left(\epsilon_0,\epsilon_1,\frac{1}{8},\frac{b^2}{2}\right)=\tau \tag{7.2.41}$$

时, 存在局部 Lipschitz 连续的算子 $\psi=\psi_{\epsilon,\bar\epsilon}: E\to E$, 满足 (7.2.21). 根据定理 6.5.2, 对任意 $u\in E$, 常微分方程初值问题

$$\frac{d\eta(t,u)}{dt}=-\psi(\eta(t,u)),\quad \eta(0,u)=u \tag{7.2.42}$$

在 $[0,\infty)$ 中有唯一解 $\eta(t,u)$, 且 $\eta(t,u)$ 在 $[0,1]$ 上对初值 u 是一致连续的, 因而 $\eta(t,u)\in C([0,1]\times E,E)$. 下面证明 $\eta(t,u)$ 具有性质 $1^\circ\sim 7^\circ$.

1° 由 $\eta(t,u)$ 是初值问题 (7.2.42) 的解得出 $\eta(0,u)=u$.

2° 由 (7.2.42), (7.2.36), (7.2.29), (7.2.34) 及 (7.1.26) 得出

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}I(\eta(t,u))=\langle I'(\eta(t,u)),-\psi(\eta(t,u))\rangle\\&=-g(\eta(t,u))\zeta(||\Phi(\eta(t,u)||)\langle I'(\eta(t,u)),\Phi(\eta(t,u))\rangle\\&\leq -g(\zeta(t,u))\zeta(||\Phi(\eta(t,u)||)||I'(\eta(t,u))||^2\leq 0,\end{aligned}\tag{7.2.43}$$

即 $I(\eta(t,u))$ 关于 t 是单调函数, 从而有

$$I(\eta(t,u))\leq I(\eta(0,u))=I(u),\quad \forall(t,u)\in[0,1]\times E.$$

3° 当 $I(u)\notin[c-\bar{\epsilon},c+\bar{\epsilon}]$ 时, 由 (7.2.25) 知道 $u\in A$, 而 A 是开集, 因而存在 $R=R(u)>0$, 使得

$$B_R(u)\subset A.$$

因此, 由 (7.2.36) 及 (7.2.30) 得出

$$\psi(x)=0,\quad \forall x\in B_R(u).\tag{7.2.44}$$

由 $\eta(t,u)$ 关于 t 的连续性知道: 存在 $\tau>0$, 使得

$$||\eta(t,u)-u||=||\eta(t,u)-\eta(0,u)||<R,\quad \forall t\in[0,\tau],$$

即

$$\eta(t,u)\in B_R(u),\quad \forall t\in[0,\tau].\tag{7.2.45}$$

因此, 由 (7.2.44) 得出

$$\Phi(\eta(t,\mu))=0,\ \ \forall\ t\in[0,\tau].$$

因为 $\eta(t,u)$ 是常微分方程初值问题 (7.2.42) 的解, 由上式得出

$$\frac{d\eta(t,u)}{dt}=-\psi(\eta(t,u))=0,\quad \forall t\in[0,\tau],\quad \eta(0,u)=u.$$

由此得出

$$\eta(t,u)=u,\quad \forall t\in[0,\tau]. \tag{7.2.46}$$

设 τ 为使 (7.2.46) 成立的最大的 τ 值. 如果 $\tau\geq 1$, 则 3° 得证. 如果 $\tau<1$, 又由 $\eta(t,u)$ 关于 t 的连续性知道: 存在 $\delta>0$, 使得

$$||\eta(t,u)-\eta(\tau,u)||<R,\quad \forall t\in[\tau,\tau+\delta].$$

由此式及 (7.2.46) 得出

$$||\eta(t,u)-u||<R,\quad \forall t\in[\tau,\tau+\delta].$$

由此式及 (7.2.45) 知道

$$\eta(t,u)\in B_R(u),\quad \forall t\in[\tau,\tau+\delta].$$

再由 (7.2.44) 得

$$\psi(\eta(t,u))=0,\quad \forall t\in[\tau,\tau+\delta].$$

再利用常微分方程初值问题 (7.2.42) 的解的唯一性, 由上式得出

$$\eta(t,u)=u,\quad \forall t\in[\tau,\tau+\delta].$$

此式与假设 τ 是使 (7.2.46) 成立的最大的 τ 值相矛盾.

4° 对任意确定的 $\tau\in[0,1]$, 由定理 6.5.2 知道:

$\eta(\tau,\cdot):u\to\eta(\tau,u)$ 是 $E\to E$ 的连续映射, 且对 $v=\eta(\tau,u)$ 常微分方程初值问题

$$\frac{d\bar{\eta}(t)}{dt}=-\psi(\bar{\eta}(t)),\quad \bar{\eta}(\tau)=v \tag{7.2.47}$$

在 $[0,\infty)$ 中有唯一解 $\bar{\eta}(t)=\bar{\eta}(t,\tau,v)$, 且 $\bar{\eta}(0,\tau,\cdot):v\to\bar{\eta}(0,\tau,v)$ 是 $E\to E$ 的连续映射. 由

$$\bar{\eta}(\tau,\tau,v)=v=\eta(\tau,u)$$

及初值问题 (7.2.47) 的解的唯一性得出

$$\bar{\eta}(t,\tau,v)=\eta(t,u). \tag{7.2.48}$$

于是由

$$\bar{\eta}(0,\tau,\cdot)\eta(\tau,\cdot)u=\bar{\eta}(0,\tau,\cdot)v=\eta(0,u)=u,$$

$$\eta(\tau,\cdot)\bar{\eta}(0,\tau,\cdot)v=\eta(\tau,\cdot)\eta(0,u)=\eta(\tau,u)=v$$

得出

$$\bar{\eta}(0,\tau,\cdot)\eta(\tau,\cdot)=\eta(\tau,\cdot)\bar{\eta}(0,\tau,\cdot)=I(\text{恒等映射}).$$

因此， $\eta(\tau,\cdot)$ 是 $E\to E$ 的同胚映射.

5° 由 (7.2.42) 及 (7.2.21) 知道，对任意 $(t,u)\in[0,1]\times E$ 有

$$\begin{aligned}||\eta(t,u)-u||&=\left\|\int_0^t\psi(\eta(s,u))ds\right\|\\&\le\int_0^t||\psi(\eta(s,u))||ds\le t\le 1.\end{aligned}$$

6° 设 $u\in\eta(1,I_{c+\epsilon})$, 即存在 $v\in I_{c+\epsilon}$ 使得

$$u=\eta(1,v).$$

因此 $I(v)\le c+\epsilon$. 分下列两种情形证明需要的结论 $u\in I_{c-\epsilon}$.

1) 当 $I(v)\le c-\epsilon$ 时，由 2° 得

$$I(\eta(1,v))\le I(v)\le c-\epsilon,$$

即 $\quad u=\eta(1,v)\in I_{c-\epsilon}$.

2) 当 $c-\epsilon<I(v)\le c+\epsilon$ 时，只需证明:

$$\text{存在}t\in[0,1],\quad \text{使得}\eta(t,v)\in I_{c-\epsilon}. \tag{7.2.49}$$

因为由上式及 1° 得出

$$I(\eta(1,v))\le I(\eta(t,v))\le c-\epsilon,$$

由此得 $u=\eta(1,v)\in I_{c-\epsilon}$.

今用反证法证明 (7.2.49). 设 (7.2.49) 不真，即有

$$I(\eta(t,v))>c-\epsilon,\quad \forall t\in[0,1]. \tag{7.2.50}$$

由此式及性质 2° 得

$$c-\epsilon<I(\eta(t,v))\le I(v)\le c+\epsilon,\quad \forall t\in[0,1]. \tag{7.2.51}$$

因此，由 (7.2.41) 知道

$$c-\epsilon_1<I(\eta(t,v))\le c+\epsilon_1,\quad \forall t\in[0,1],$$

即 $\eta(t,v)\in I_{c+\epsilon_1}\backslash I_{c-\epsilon_1}$. 再由 (7.2.40) 得出

$$||I'(\eta(t,v))||\ge b,\quad \forall t\in[0,1]. \tag{7.2.52}$$

由 (7.2.51), (7.2.25) 及 (7.2.30) 又有

$$\eta(t,v)\in B,\quad g(\eta(t,v))=1,\quad \forall t\in[0,1]. \tag{7.2.53}$$

于是由 (7.2.51), (7.2.42), (7.2.36), (7.2.53) 及 (7.1.16) 得出

$$\begin{aligned}2\epsilon>I(v)-I(\eta(1,v))&=-\int_0^1\frac{d}{dt}I(\eta(t,v))dt\\&=\int_0^1\langle I'(\eta(t,v)),\psi(\eta(t,v))\rangle dt\\&=\int_0^1\zeta(||\Phi(\eta(t,v))||)\langle I'(\eta(t,v)),\psi(\eta(t,v))\rangle dt\\&\ge\int_0^1\zeta(||\Phi(\eta(t,v))||)||I'(\eta(t,v))||^2dt.\end{aligned} \tag{7.2.54}$$

由 (7.2.34), (7.2.52) 及 (7.1.25) 又有

$$\zeta(||\Phi(\eta(t,v))||)||I'(\eta(t,v))||^2$$

$$=\begin{cases} ||I'(\eta(t,v))||^2 \geq b^2, \\ \qquad \text{当} 0 \leq ||\Phi(\eta(t,v))|| \leq 1, \\ \dfrac{||I'(\eta(t,v))||^2}{||\Phi(\eta(t,v))||} \geq \dfrac{||\Phi(\eta(t,v))||}{4} \geq \dfrac{1}{4}, \\ \qquad \text{当} ||\Phi(\eta(t,v))|| \geq 1. \end{cases}$$

把这个不等式代入 (7.2.54) 的右端得出

$$2\epsilon > \min\left(b^2, \frac{1}{4}\right).$$

此式与 (7.2.41) 相矛盾.

7° 如果 I 为偶泛函，则由引理 7.2.5, 算子 $\psi : E \to E$ 可取为奇算子. 对微分方程初值问题 (7.2.42) 的解 $\eta(t,u)$, 令 $\bar{\eta}(t,u) = -\eta(t,-u)$, 则由 (7.2.42) 得出

$$\frac{d\bar{\eta}(t,u)}{dt} = -\frac{d\eta(t,-u)}{dt} = \psi(\eta(t,-u)) = -\psi(-\eta(t,-u)) = -\psi(\bar{\eta}(t,u)),$$

$$\bar{\eta}(0,u) = -\eta(0,-u) = -(-u) = u.$$

即 $\bar{\eta}(t,u)$ 也是初值问题 (7.2.42) 的解. 由解的唯一性知道 $\eta(t,u) = \bar{\eta}(t,u) = -\eta(t,-u)$, 即 $\eta(t,u)$ 关于 u 为奇算子.

注 2 如果考虑正的伪梯度,即代替微分方程初值问题 (7.2.42) 而考虑微分方程初值问题

$$\frac{d\hat{\eta}(t,u)}{dt} = \psi(\hat{\eta}(t,u)), \quad \hat{\eta}(0,u) = u,$$

则定理 7.2.26 中的性质 1°, 3° ~ 5° 及 7° 对 $\hat{\eta}$ 也成立. 而性质 2° 及 6° 分别变为

2° $I(\hat{\eta}(t,u))$ 关于 t 是单调增函数，特别地有

$$I(\hat{\eta}(t,u)) \geq I(u), \quad \forall t \in [0,1].$$

6° $\hat{\eta}(1, \hat{I}_{c-\epsilon}) \subset \hat{I}_{c+\epsilon}$, 其中 $\hat{I}_c = \{x \in E | I(x) \geq c\}$.

7.3 极小极大原理

定理 7.3.1(极小极大原理) 设 $I \in C^1(E, R)$, $\mathcal{A}$ 为 E 的非空子集族, 记

$$c = \inf_{A \in \mathcal{A}} \sup_{x \in A} I(x). \tag{7.3.1}$$

如果满足条件:

(i) c 是一个有限数;

(ii) 存在 $\bar{\epsilon} > 0$, 使得 $\mathcal{A}$ 关于映射族

$$\mathcal{F} = \{T \in C(E, E) | T(x) = x, \quad 当 I(x) < c - \bar{\epsilon}\} \tag{7.3.2}$$

是不变的, 即对任意 $T \in \mathcal{F}$ 满足

$$若 A \in \mathcal{A}, 则 T(A) \in \mathcal{A}. \tag{7.3.3}$$

那么, I 关于 c 有临界序列. 如果 I 再满足 P-S 条件, 则 c 为 I 的临界值.

证 用反证法. 假定 I 关于 c 没有临界序列, 由形变定理, 存在 $\tau > 0$, 当 $0 < \epsilon < \bar{\epsilon} \leq \tau$ 时, 存在 $\eta(t, u) \in C([0, 1] \times E, E)$, η 具有性质 $1^\circ \sim 7^\circ$. 由性质 3° 及 4° 知道 $\eta(1, \cdot) \in \mathcal{F}$. 因此, 对 $T = \eta(1, \cdot)$ 有 (7.3.3), 即

$$若 A \in \mathcal{A}, \quad 则 \eta(1, A) \in \mathcal{A}. \tag{7.3.4}$$

由 c 的定义 (7.3.1), 对 $\epsilon > 0$, 存在 $A \in \mathcal{A}$ 使得

$$\sup_{x \in A} I(x) < c + \epsilon, \quad 从而 \quad A \subset I_{c+\epsilon}.$$

因此, 由性质 6° 得出

$$\eta(1, A) \subset \eta(1, I_{c+\epsilon}) \subset I_{c-\epsilon}.$$

由 $A\in\mathcal{A}$, (7.3.1) 及上式得出

$$c\le\sup_{x\in\eta(1,A)}I(x)\le c-\epsilon.$$

这个不等式是不成立的，因为 $\epsilon>0$. 这就证明了 I 关于 c 有临界序列. 如果 I 再满足 P-S 条件，由引理 7.2.1 知道 c 是 I 的临界值.

注 将映射族 $\mathcal{F}$ 转换成映射族

$$\mathcal{F}_+=\{T\in C(E,E)|T(x)=x,\quad 当I(x)>c+\bar{\epsilon}\}$$

后定理 7.3.1 仍成立. 这样又得到一个极小极大原理.

极小极大原理是用来证明临界点存在的基本方法，它的技巧和困难在于寻求满足条件 (ii) 的子集族 $\mathcal{A}$.

在定理 7.3.1 中取 $\mathcal{A}=\{\{x\}|x\in E\}$ (E 中每一元素 x 看成 $\mathcal{A}$ 中的一个子集) 及 $\mathcal{A}=\{E\}$(E 是 $\mathcal{A}$ 的唯一子集) 分别得出下面两个推论.

推论 7.3.2 设 $I\in C^1(E,E)$. 如果 I 有下界且满足 P-S 条件，则

$$c=\inf_{x\in E}I(x)$$

是 I 的一个临界值.

推论 7.3.3 设 $I\in C^1(E,E)$. 如果 I 有上界且满足 P-S 条件，则

$$c=\sup_{x\in E}I(x)$$

是 I 的一个临界值.

下面的定理是推论 7.3.2 在微分方程边值问题中的一个应用.

定理 7.3.4 设 Ω 是 R^n 中的有界区域，常数 r 满足

$$0<r<\begin{cases}\dfrac{n+2}{n-2}, & 当n>2,\\[2ex] +\infty, & 当n\le 2,\end{cases}\tag{7.3.5}$$

$f \in L^{\frac{r+1}{r}}(\Omega)$, $g(x,u) \in C(\bar{\Omega} \times R, R)$ 满足

$$ug(x,u) \geq 0, \quad \forall (x,u) \in \bar{\Omega} \times R, \tag{7.3.6}$$

$$|g(x,u)| \leq a(x) + b|u|^r, \quad \forall (x,u) \in \bar{\Omega} \times R, \tag{7.3.7}$$

其中 $a(x) \in L^{\frac{r+1}{r}}(\Omega)$, $b > 0$. 那么，半线性椭圆方程边值问题

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x) - g(x,u), & \text{在 } \Omega \text{ 中}, \\ u = 0, & \text{在 } \partial\Omega \text{ 上}, \end{cases} \tag{7.3.8}$$

在 $W_0^{1,2}(\Omega)$ 中有弱解 u, 它满足

$$\int_\Omega Du \cdot D\phi dx = \int_\Omega [f(x) - g(x,u)]\phi dx, \quad \forall \phi \in W_0^{1,2}(\Omega). \tag{7.3.9}$$

证 由条件 (7.3.6) 得出

$$G(x,u) = \int_0^u g(x,t)dt \geq 0, \quad \forall (x,u) \in \bar{\Omega} \times R.$$

因此，对任意 $u \in W_0^{1,2}(\Omega) = E$ 有

$$\begin{aligned} I(u) &= \frac{1}{2}\int_\Omega |Du|^2 dx - \int_\Omega f(x)udx + \int_\Omega G(x,u)dx \\ &\geq \frac{1}{2}\int_\Omega |Du|^2 dx - \int_\Omega f(x)udx. \end{aligned} \tag{7.3.10}$$

由嵌入定理 2.6.1, 存在常数 $C = C(n,r,\Omega) > 0$ 使得

$$||u||_{r+1} \leq C||u||_E, \quad \forall u \in E = W_0^{1,2}(\Omega). \tag{7.3.11}$$

由 Holder 不等式及 (7.3.11) 有

$$\left|\int_\Omega f(x)udx\right| \leq ||f||_{\frac{r+1}{r}}||u||_{r+1} \leq C||f||_{\frac{r+1}{r}}||u||_E.$$

以此式代入 (7.3.10) 得

$$I(u) \geq \frac{1}{2}||u||_E^2 - C||f||_{\frac{r+1}{r}}||u||_E. \tag{7.3.12}$$

以不等式

$$C\|f\|_{\frac{r+1}{r}}\|u\|_E \le \frac{1}{2}(C\|f\|_{\frac{r+1}{r}})^2 + \frac{1}{2}\|u\|_E^2$$

代入 (7.3.12) 得

$$I(u) \ge -\frac{1}{2}C^2\|f\|_{\frac{r+1}{r}}^2,$$

即 I 在 $E = W_0^{1,2}(\Omega)$ 中有下界. 再以不等式

$$C\|f\|_{\frac{r+1}{r}}\|u\|_E \le (C\|f\|_{\frac{r+1}{r}})^2 + \frac{1}{4}\|u\|_E^2$$

代入 (7.3.12) 得出

$$I(u) \ge \frac{1}{4}\|u\|_E^2 - C^2\|f\|_{\frac{r+1}{r}}^2,$$

即

$$\|u\|_E^2 \le 4I(u) + 4C^2\|f\|_{\frac{r+1}{r}}^2.$$

此不等式说明， $E = W_0^{1,2}(\Omega)$ 中满足条件

$$\{I(u_k)\}\text{有界}$$

的序列 $\{u_k\}$ 都是 E 中的有界序列；而由 (7.3.7) 有

$$|f(x) - g(x,u)| \le |f(x)| + a(x) + b|u|^r,$$

其中 $|f(x)| + a(x) \in L^{\frac{r+1}{r}}(\Omega)$, 即引理 7.2.2 的条件都是满足的. 由注 1 知道，泛函 I 满足 P-S 条件. 这样一来，由推论 7.3.2 得出

$$c = \inf_{u\in W_0^{1,2}(\Omega)} I(u)$$

是 I 的一个临界值，即存在 $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ 使得

$$c = I(u), \quad I'(u) = 0. \tag{7.3.13}$$

由 (7.3.10), 利用定理 6.3.2 得出

$$\langle I'(u), \phi\rangle = \int_\Omega \{Du \cdot D\phi - [f(x) - g(x,u)]\phi\}dx,$$

$$\forall \phi \in W_0^{1,2}(\Omega).$$

由此式及 (7.3.13) 得出 (7.3.9).

7.4 山路引理及其应用

下面的定理是 1973 年由 Ambrosetti A. 与 Rabinowitz P. H.[18] 得出并称之为山路引理. 它形象地说明, 从盆地中心出发到盆地外部, 必有一条道路从周围山脉的最低点越过, 这个最低点就是一个临界点. 山路引理及各种山路定理的建立, 特别是它们在非线性微分方程各种问题的应用中取得的许多很有意义的新结果, 吸引了不少数学家从事临界点理论的研究, 从而使临界点理论及其应用的成果在近 20 多年取得了重大的进展.

定理 7.4.1(山路引理) 设 E 是 Banach 空间, $I \in C^1(E,R)$ 满足

(i) $I(0)=0$, 存在 $\rho > 0$ 使得 $I_{\partial B_\rho(0)} \geq \alpha > 0$;

(ii) 存在 $e \in E\backslash\overline{B_\rho(0)}$ 使得 $I(e) \leq 0$.

令 Γ 是 E 中联结 0 与 e 的道路的集合, 即

$$\Gamma = \{g \in C([0,1],E) | g(0)=0, g(1)=e\}, \tag{7.4.1}$$

再记

$$c = \inf_{g\in\Gamma} \max_{t\in[0,1]} I(g(t)). \tag{7.4.2}$$

那么, $c \geq \alpha$, I 关于 c 有临界序列. 如果 I 再满足 P-S 条件, 则 c 是 I 的临界值.

证 任取 $g \in \Gamma$, 由于 $I(g(t)) : [0,1] \to R$ 连续, 因而 $\max\limits_{t\in[0,1]} I(g(t)) < \infty$. 再由 (7.4.2) 知 $c < \infty$. 又对任意 $g \in \Gamma$, 由条件 (ii) 及 (i) 有

$$\|g(1)\| = \|e\| > \rho > 0 = \|g(0)\|,$$

根据 $\|g(t)\|$ 的连续性知道，存在 $t_0 \in (0,1)$, 使得 $\|g(t_0)\| = \rho$, 因此由 (i) 得

$$\max_{t\in[0,1]} I(g(t)) \geq I(g(t_0)) \geq \alpha,$$

从而由 (7.4.2) 得 $c \geq \alpha$.

假如 I 关于 c 没有临界序列，由形变定理 7.2.6, 存在 $\tau > 0$, 当 $0 < \epsilon < \bar{\epsilon} \leq \min(\frac{\alpha}{2}, \tau)$ 时，存在 $\eta(t,u) \in C([0,1] \times E, E)$ 具有性质 $1^\circ \sim 6^\circ$. 对 $\epsilon > 0$, 由 (7.4.2) 知道：存在 $g \in \Gamma$ 使得

$$\max_{t\in[0,1]} I(g(t)) < c + \epsilon. \tag{7.4.3}$$

考虑 $h(t) = \eta(1, g(t)) \in C([0,1], E)$. 由于

$$I(e) \leq 0 = I(0) < \frac{\alpha}{2} \leq c - \bar{\epsilon},$$

由性质 3° 得出

$$h(0) = \eta(1, g(0)) = \eta(1, 0) = 0,$$

$$h(1) = \eta(1, g(1)) = \eta(1, e) = e.$$

因此 $h \in \Gamma$. 从而由 (7.4.2) 有

$$c \leq \max_{t\in[0,1]} I(h(t)). \tag{7.4.4}$$

由 (7.4.3) 及性质 6° 得

$$h(t) = \eta(1, g(t)) \in \eta(1, I_{c+\epsilon}) \subset I_{c-\epsilon}, \quad \forall t \in [0,1],$$

即

$$I(h(t)) \leq c - \epsilon, \quad \forall t \in [0,1].$$

此式与 (7.4.4) 相矛盾. 故 I 关于 c 有临界序列. 如果 I 再满足 P-S 条件，由引理 7.2.1 得出： c 是 I 的临界值. 证完.

下面给出山路引理对微分方程边值问题的一些应用. 设 Ω 是 R^n 中的有界区域. 讨论半线性椭圆方程 Dirichlet 问题

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x,u), & 在\ \Omega\ 中, \\ u = 0, & 在\ \partial\Omega\ 上, \end{cases} \tag{7.4.5}$$

其中函数 $f(x,u)$ 在 $\bar{\Omega}\times R$ 上满足条件:

(f_1) $f \in C(\bar{\Omega}\times R, R)$;

(f_2) 当 $n \le 2$ 时, 存在正数 s, 当 $n \ge 3$ 时存在正数 $s < \dfrac{n+2}{n-2}$, 使得

$$f(x,u) = o(|u|^s)(当 u \to \infty)对 x \in \Omega 一致地成立;$$

(f_3) $f(x,u) = o(|u|)$(当 $|u| \to 0$) 对 $x \in \Omega$ 一致地成立.

由条件 (f_3) 知道, Dirichlet 问题 (7.4.5) 有平凡解 $u = 0$.

在本节中, 以后均记 $E = W_0^{1,2}(\Omega)$, 且

$$F(x,u) = \int_0^u f(x,t)dt. \tag{7.4.6}$$

定理 7.4.2 设函数 $f(x,u)$ 满足条件 (f_1), (f_2), (f_3) 及条件

(f_4) 存在常数 $\mu > 2$ 及 $r > 0$ 使得

$$0 < \mu F(x,u) \le u f(x,u), \quad 当 (x,u) \in \bar{\Omega}\times R, \quad |u| \ge r.$$

那么, 半线性椭圆方程 Dirichlet 问题 (7.4.5) 在 $W_0^{1,2}(\Omega)$ 中有非平凡弱解 u, 它满足

$$\int_\Omega Du\cdot D\phi = \int_\Omega f(x,u(x))\phi dx, \quad \forall \phi \in W_0^{1,2}(\Omega). \tag{7.4.7}$$

证 讨论 $E = W_0^{1,2}(\Omega)$ 上的泛函

$$I(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |Du|^2 dx - \int_\Omega F(x,u)dx. \tag{7.4.8}$$

由定理 6.3.2 得出 $I \in C^1(E,R)$, 且

$$\langle I'(u), \phi\rangle = \int_\Omega [Du\cdot D\phi - f(x,u)\phi]dx, \quad \forall \phi \in E. \tag{7.4.9}$$

由条件 (f_3), 对任意 $\epsilon > 0$, 存在 $\delta = \delta(\epsilon) > 0$, 使得

$$|f(x,u)| \le \epsilon |u|, \quad \text{当 } |u| \le \delta.$$

由条件 (f_2), 存在正数 M, 使得

$$|f(x,u)| \le |u|^s, \quad \text{当 } |u| \ge M.$$

再由条件 (f_1), 存在正数 $b = b(\epsilon)$ 使得

$$|f(x,u)| \le b \le \frac{b}{\delta^s}|u|^s = C_1(\epsilon)|u|^s, \quad \text{当 } \delta(\epsilon) \le |u| \le M.$$

将上面三个不等式合并得出

$$|f(x,u)| \le \epsilon|u| + C_2(\epsilon)|u|^s, \quad \forall (x,u) \in \bar{\Omega} \times R, \tag{7.4.10}$$

其中 $C_2(\epsilon) = 1 + C_1(\epsilon)$. 由上式及 (7.4.6) 得出

$$F(x,u) \le \int_0^{|u|} [\epsilon t + C_2(\epsilon)t^s]dt, \quad \forall (x,u) \in \bar{\Omega} \times R.$$

命 $C(\epsilon) = \dfrac{C_2(\epsilon)}{s+1}$. 由上式得出

$$F(x,u) \le \frac{\epsilon}{2}|u|^2 + C(\epsilon)|u|^{s+1}, \quad \forall (x,u) \in \bar{\Omega} \times R. \tag{7.4.11}$$

由条件 (f_4) 有

$$\frac{\mu}{u} \le \frac{f(x,u)}{F(x,u)}, \quad \text{当 } u \ge r,$$

$$\frac{\mu}{u} \ge \frac{f(x,u)}{F(x,u)}, \quad \text{当 } u \le -r.$$

此两式对 u 分别在区间 $[r,u]$ 及 $[-u,r]$ 上积分得出

$$\mu \ln \frac{u}{r} \le \ln \frac{F(x,u)}{F(x,r)}, \quad \text{当 } u \ge r,$$

$$\mu \ln \frac{r}{-u} \geq \ln \frac{F(x,-r)}{F(x,u)}, \quad 当\ u \leq -r.$$

即

$$F(x,u) \geq F(x,r)\left(\frac{u}{r}\right)^{\mu}, \quad 当\ u \geq r,$$

$$F(x,u) \geq F(x,-r)\left(\frac{-u}{r}\right)^{\mu}, \quad 当\ u \leq -r.$$

合并这两个式子得出

$$F(x,u) \geq a_3|u|^{\mu}, \quad 当\ |u| \geq r, \tag{7.4.12}$$

其中

$$a_3 = r^{-\mu}\min\{\min_{x\in\bar{\Omega}} F(x,r), \min_{x\in\bar{\Omega}} F(x,-r)\} > 0.$$

再由 $F(x,u)$ 的连续性知道, $F(x,u)$ 在上 $\bar{\Omega}\times[-r,r]$ 有界, 因而存在常数 $K>0$ 使得

$$F(x,u) \geq -K \geq a_3|u|^{\mu} - a_3r^{\mu} - K, \quad 当\ |u| \leq r. \tag{7.4.13}$$

将不等式 (7.4.12) 及 (7.4.13) 合并得出

$$F(x,u) \geq a_3|u|^{\mu} - a_4, \quad \forall (x,u) \in \bar{\Omega}\times R, \tag{7.4.14}$$

其中 $a_4 = a_3r^{\mu} + K > 0$.

下面验证泛函 I 满足定理 7.4.1(山路引理) 的条件.

(i) 因为 $F(x,0)=0$, 从而由 I 的定义 (7.4.8) 得出 $I(0)=0$. 根据 Sobolev 空间 $E=W_0^{1,2}(\Omega)$ 的嵌入定理 5.6.1, 由条件 (f_2) 得出: 存在常数 $C_1>0$, $C_2>0$ 使得

$$||u||_2 \leq C_1||u||_E, \quad ||u||_{s+1} \leq C_2||u||_E, \quad \forall u \in E. \tag{7.4.15}$$

由 (7.4.8), (7.4.11) 及 (7.4.15) 得出

$$
\begin{aligned}
I(u) &\geq \frac{1}{2}\int_\Omega |Du|^2 dx - \int_\Omega \left(\frac{\epsilon}{2}|u|^2 + C(\epsilon)|u|^{s+1}\right) dx \\
&= \frac{1}{2}||u||_E^2 - \frac{\epsilon}{2}||u||_2^2 - C(\epsilon)||u||_{s+1}^{s+1} \\
&\geq \frac{1}{2}||u||_E^2 - \frac{\epsilon}{2}(C_1||u||_E)^2 - C(\epsilon)(C_2||u||_E)^{s+1} \\
&= \frac{1}{2}(1 - C_1^2\epsilon)||u||_E^2 - C_2^{s+1}C(\epsilon)||u||_E^{s+1}.
\end{aligned}
$$

在这个不等式中取 $\epsilon = \dfrac{1}{2C_1^2}$ 得出

$$
\begin{aligned}
I(u) &\geq \frac{1}{4}||u||_E^2 - C_3||u||_E^{s+1} \\
&= \frac{1}{4}||u||_E^2(1 - 4C_3||u||_E^{s-1}), \quad \forall u \in E.
\end{aligned}
\tag{7.4.16}
$$

由 (7.4.11) 及 (7.4.14) 知道 $s + 1 \geq \mu > 2$, 因而 $s > 1$. 令 $\rho = \left(\dfrac{1}{8C_3}\right)^{\frac{1}{s-1}} > 0$, 由 (7.4.16) 得出

$$
I(u) \geq \frac{1}{8}\rho^2 = \alpha > 0, \quad \text{当 } ||u||_E = \rho,
$$

这就证明了 $I|_{\partial B_\rho(0)} = \alpha > 0$.

(ii) 由 (7.4.8) 及 (7.4.14) 得出

$$
\begin{aligned}
I(u) &\leq \frac{1}{2}\int_\Omega |Du|^2 dx - \int_\Omega (a_3|u|^\mu - a_4)dx \\
&= \frac{1}{2}\int_\Omega |Du|^2 dx - a_3\int_\Omega |u|^\mu dx + a_4|\Omega|.
\end{aligned}
$$

任意取定一个满足 $||u||_E = 1$ 的 $u \in E = W_0^{1,2}(\Omega)$, 则由上式, $\mu > 2$ 及 $\int_\Omega |u|^\mu > 0$ 得出

$$
I(tu) \leq \frac{t^2}{2}\int_\Omega |Du|^2 dx - a_3 t^\mu \int_\Omega |u|^\mu dx + a_4|\Omega| \to -\infty, \quad \text{当 } t \to +\infty.
$$

因此，存在 $t>\rho$ 使得

$$I(tu)\leq 0.$$

这就证明了：存在 $e=tu\in E\backslash\overline{B_\rho(0)}$(即 $\|e\|_E=t>\rho$) 满足 $I(e)\leq 0$.

最后验证 I 满足 P-S 条件. 设 $\{u_m\}\subset E$, 满足条件

$$|I(u_m)\leq M,\quad m=1,2,\cdots \tag{7.4.17}$$

$$I'(u_m)\to 0,\quad 在E^*中\quad 当m\to\infty. \tag{7.4.18}$$

由引理 7.2.2 之注，只需证明 $\{u_m\}$ 在 E 中有界. 由 (7.4.18) 知道：存在正整数 m_0 使得

$$\|I'(u_m)\|\leq 1,\quad 当\ m\geq m_0,$$

由此得出

$$|\langle I'(u_m),\phi\rangle|\leq\|\phi\|_E,\quad\forall\phi\in E,当\ m\geq m_0. \tag{7.4.19}$$

由 (7.4.8) 及 (7.4.9), 根据条件 (f_4) 及 (f_1) 得出

$$\begin{aligned}&\mu I(u_m)-\langle I'(u_m),u_m\rangle\\&=\left(\frac{\mu}{2}-1\right)\|u_m\|_E^2+\int_\Omega[u_mf(x,u_m)-\mu F(x,u_m)]dx\\&\leq\left(\frac{\mu}{2}-1\right)\|u_m\|_E^2+\int_\Omega\max_{x\in\bar\Omega,|u|\leq r}|uf(x,u)-\mu F(x,u)|dx\\&=\left(\frac{\mu}{2}-1\right)\|u_m\|_E^2-C_4.\end{aligned} \tag{7.4.20}$$

由 (7.4.20), (7.4.17) 及 (7.4.19) 得出

$$\left(\frac{\mu}{2}-1\right)\|u_m\|_E^2\leq C_4+\mu M+\|u_m\|_E,\quad 当\ m\geq m_0.$$

因为 $\mu>2$, 此式说明数列 $\{\|u_m\|_E\}$ 有界，即 $\{u_m\}$ 在 E 中有界.

我们证明了 $E = W_0^{1,2}(\Omega)$ 上的泛函 (7.4.8) 满足山路引理的一切条件. 因而泛函 (7.4.8) 有临界值 c, 且存在临界点 $u \in E$ 使得 $I'(u) = 0$. 再由 (7.4.9) 知道 u 满足 (7.4.7), 即半线性椭圆方程 Dirichlet 问题 (7.4.5) 有弱解 $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$, 且由 $I(u) = c \geq \alpha > 0$ 知道 $u \neq 0$, 即 u 是非平凡解.

注 1 将算子 $(-\Delta)$ 换为满足条件 (3.3.2)~(3.3.4) 且由 (3.3.1) 定义的二阶线性自共轭椭圆算子 A 后, 定理 7.4.2 仍然成立.

注 2 著者应用山路引理曾将定理 7.4.2 推广到拟线性椭圆方程 Dirichlet 问题

$$\begin{cases} -\sum_{i=1}^{n} D_i[a_i(x, Du)] = f(x, u), & \text{在 } \Omega \text{ 中}, \\ u = 0, & \text{在 } \partial\Omega \text{ 上}, \end{cases}$$

建立了各向异性 Sobolev 空间 $W_0^{1,(p_i)}(\Omega)$ 中非平凡弱解的存在定理, 参阅文献 [7].

7.5 弱解的正则性

本节研究半线性椭圆方程 Dirichlet 问题

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x, u), & \text{在 } \Omega \text{ 中}, \\ u = 0, & \text{在 } \partial\Omega \text{ 上}, \end{cases} \tag{7.5.1}$$

在 $W_0^{1,2}(\Omega)$ 中的弱解的正则性 (光滑性). 我们将证明: 如果区域 Ω 及方程右端 $f(x,u)$ 适当光滑, 则问题 (7.5.1) 的弱解 u 就是光滑函数, 从而我们将得到问题 (7.5.1) 的古典解的存在定理.

关于区域的光滑性有下列定义.

定义 设 Ω 是 R^n 中的有界区域, k 是非负整数, $0 \leq \alpha \leq 1$. 如果对每一点 $x_0 \in \partial\Omega$, 存在以 x_0 为中心的球 $B = B(x_0)$ 及映射 $\psi : B \to R^n$, 使得

(i) $\psi(B \bigcap \Omega) \subset R_+^n = \{x \in R^n | x_n > 0\}$;

(ii) $\psi(B\bigcap\partial\Omega)\subset\partial R_+^n=\{x\in R^n|x_n=0\}$;

(iii) ψ 是 $B\to D=\psi(B)$ 的一一映射，且有

$$\psi\in C^{k,\alpha}(B),\quad \psi^{-1}\in C^{k,\alpha}(D).$$

则称 Ω 是 R^n 中的 $C^{k,\alpha}$ **区域**.

由这个定义得出：如果对每一点 $x_0\in\partial\Omega$, 存在以 x_0 为中心的球 $B=B(x_0)$ 及以 x_0 为原点的坐标系 $\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$, 使得 $B\bigcap\partial\Omega$ 可以表示成

$$x_n=\phi(x_1,\cdots,x_{n-1}),\quad \phi\in C^{k,\alpha},$$

则 Ω 是 $C^{k,\alpha}$ 区域. 当 $k\geq 1$, 这个命题的逆命题也成立.

由上面的定义又知道：当 $j+\beta<k+\alpha$ 时， $C^{k,\alpha}$ 区域也是 $C^{j,\beta}$ 区域.

以后如果没有特别说明，均以 k 表示非负整数， $0<\alpha<1$.

定理 7.5.1 设 Ω 是 R^n 中的 $C^{k+2,\alpha}$ 区域，函数 $f(x)\in C^{k,\alpha}(\bar{\Omega})$. 那么， Poisson 方程 Dirichlet 问题

$$\begin{cases}-\Delta u=f, & \text{在 } \Omega \text{ 中},\\ u=0, & \text{在 } \partial\Omega \text{ 上}\end{cases}\tag{7.5.2}$$

有唯一古典解 $u\in C^{k+2,\alpha}(\bar{\Omega})$.

此定理可参阅文献 [12] 定理 6.14 及定理 6.19.

定理 7.5.2 设 Ω 是 R^n 中的 $C^{1,1}$ 区域， $f\in L^p(\Omega)$, $1<p<\infty$. 那么, Dirichlet 问题 (7.5.2) 有唯一的解 $u\in W_0^{1,p}(\Omega)\bigcap W^{2,p}(\Omega)$.

此定理可参阅文献 [4] 第三章定理 6.3 或文献 [12] 定理 9.15.

引理 7.5.3 设 $n\geq 3$, Ω 是 R^n 中的有界区域, $a(x)\in L^{\frac{n}{2}}(\Omega)$. 如果 u 是线性椭圆方程 Dirichlet 问题

$$\begin{cases}-\Delta u=a(x)u, & \text{在 } \Omega \text{ 中},\\ u=0, & \text{在 } \partial\Omega \text{ 上},\end{cases}\tag{7.5.3}$$

在 $W_0^{1,2}(\Omega)$ 中的弱解，则有

$$u \in L^q(\Omega), \quad \forall q \in [2, \infty). \tag{7.5.4}$$

证 u 是 Dirichlet 问题 (7.5.3) 在 $W_0^{1,2}(\Omega)$ 中的弱解，即 $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ 满足

$$\int_\Omega Du \cdot D\phi dx = \int_\Omega a(x)u\phi dx, \quad \forall \phi \in W_0^{1,2}(\Omega). \tag{7.5.5}$$

对 $\beta = \dfrac{n}{n-2}$ 及任意的 $p \geq 2$, 我们先证明命题:

$$\text{假如 } u \in L^p(\Omega), \quad \text{则 } u \in L^{\beta p}(\Omega). \tag{7.5.6}$$

记 $\bar{u} = u^+ = \max(u, 0) \in W_0^{1,2}(\Omega)$, $s = \dfrac{p}{2} \geq 1$. 对任意 $l > 0$, 定义函数

$$g(\bar{u}) = \begin{cases} \bar{u}^{2s-1}, & \text{当 } \bar{u} \leq l, \\ l^{s-1}[sl^{s-1}\bar{u} - (s-1)l^s], & \text{当 } \bar{u} > l; \end{cases}$$

$$h(\bar{u}) = \begin{cases} \bar{u}^s, & \text{当 } \bar{u} \leq l, \\ sl^{s-1}\bar{u} - (s-1)l^s, & \text{当 } \bar{u} > l. \end{cases}$$

$g(\bar{u})$ 及 $h(\bar{u})$ 都是 $\bar{u}$ 的一致 Lipschitz 连续函数，且由 $\bar{u} \in W_0^{1,2}(\Omega)$ 知道 $g(\bar{u}), h(\bar{u}) \in W_0^{1,2}(\Omega)$. 经计算容易验证

$$0 \leq g(\bar{u}) \leq \bar{u}g'(\bar{u}), \quad 0 \leq h(\bar{u}) \leq \bar{u}^s, \tag{7.5.7}$$

$$|h'(\bar{u})|^2 \leq sg'(\bar{u}), \quad |h(\bar{u})|^2 \geq \bar{u}g(\bar{u}). \tag{7.5.8}$$

选取截割函数 $\eta \in C^1([0, \infty))$ 使得

$$\eta(t) = \begin{cases} 1, & \text{当 } 0 \leq t \leq r, \\ 0, & \text{当 } t \geq 2r, \end{cases}$$

$$0 \leq \eta(t) \leq 1, \quad |\eta'(t)| \leq \frac{2}{r}, \quad \forall t \in [0, \infty).$$

对任意取定的点 $x_0 \in \bar{\Omega}$, 在 (7.5.5) 中选用试验函数

$$\phi(x) = \eta^2(|x - x_0|)g(\bar{u}(x)) \in W_0^{1,2}(\Omega)$$

得出

$$\int_\Omega \eta^2 g'(\bar{u})|D\bar{u}|^2 dx + 2\int_\Omega \eta\eta' g'(\bar{u})\frac{Du\cdot(x-x_0)}{|x-x_0|}dx = \int_\Omega a(x)\bar{u}\eta^2 g(\bar{u})dx.$$

由此知

$$\int_\Omega \eta^2 g'(\bar{u})|D\bar{u}|^2 dx \le 2\int_\Omega \eta|\eta'|g'(\bar{u})|D\bar{u}|dx + \int_\Omega a(x)\eta^2\bar{u}g(\bar{u})dx. \tag{7.5.9}$$

由 (7.5.7) 有

$$\begin{aligned}2\eta|\eta'|g(\bar{u})|D\bar{u}| &\le 2(\eta|g'(\bar{u})|^{\frac{1}{2}}|D\bar{u}|)(|\eta'|\bar{u}^{\frac{1}{2}}|g(\bar{u})|^{\frac{1}{2}})\\ &\le \frac{1}{2}\eta^2 g'(\bar{u})|D\bar{u}|^2 + 2|\eta'|^2\bar{u}g(\bar{u}).\end{aligned}$$

将此式代入 (7.5.9) 化简得

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\int_\Omega \eta^2 g'(\bar{u})|D\bar{u}|^2 dx\\ \le\ &2\int_\Omega |\eta'|^2\bar{u}g(\bar{u})dx + \int_\Omega a(x)\eta^2\bar{u}g(\bar{u})dx.\end{aligned}$$

利用不等式 (7.5.8), 由上式得出

$$\begin{aligned}&\int_\Omega \eta^2|Dh(\bar{u})|^2 dx \le \int_\Omega \eta^2|h'(\bar{u})|^2|D\bar{u}|^2 dx \le s\int_\Omega \eta^2 g'(\bar{u})|D\bar{u}|^2 dx\\ \le\ &4s\int_\Omega |\eta'|^2\bar{u}g(\bar{u})dx + 2s\int_\Omega a(x)\eta^2\bar{u}g(\bar{u})dx\\ \le\ &2p\int_\Omega |\eta'|^2|h(\bar{u})|^2 dx + p\int_\Omega a(x)\eta^2|h(\bar{u})|^2 dx.\end{aligned} \tag{7.5.10}$$

由嵌入定理 5.6.1, 存在常数 $C_1 = C_1(n) > 0$, 使得对 $2^* = \dfrac{2n}{n-2}$ 有

$$\left(\int_\Omega |\eta h(\bar u)|^{2^*}\right)^{\frac{2}{2^*}} dx \le C_1 \int_\Omega |D(\eta h(\bar u)|^2 dx$$

$$\le C_1 \int_\Omega |\eta D h(\bar u) + \eta' \frac{x-x_0}{|x-x_0|} h(\bar u)|^2 dx$$

$$\le 2C_1 \int_\Omega |\eta D h(\bar u)|^2 dx + 2C_1 \int_\Omega |\eta'|^2 |h(\bar u)|^2 dx.$$

将 (7.5.10) 代入此式右端并利用 Holder 不等式得出

$$\left(\int_\Omega |\eta h(\bar u)|^{2^*} dx\right)^{\frac{2}{2^*}}$$

$$\le 2C_1(2p+1)\int_\Omega |\eta'|^2 |h(\bar u)|^2 dx \tag{7.5.11}$$

$$+2pC_1 \left(\int_{B_{2r}(x_0)} |a(x)|^{\frac{n}{2}}\right)^{\frac{2}{n}} \left(\int_\Omega |\eta h(\bar u)|^{2^*} dx\right)^{\frac{2}{2^*}}.$$

由于 $a(x) \in L^{\frac{n}{2}}(\Omega)$, 在 Ω 外视 $a(x) = 0$, 根据积分的绝对连续性, 存在 $r > 0$ 使得

$$\int_{B_{2r}(x_0)} |a(x)|^{\frac{n}{2}} dx \le (4pC_1)^{-\frac{n}{2}}, \quad \forall x_0 \in \bar\Omega.$$

以此式代入 (7.5.11) 化简后得

$$\left(\int_\Omega |\eta h(\bar u)|^{2^*} dx\right)^{\frac{2}{2^*}} \le 4C_1(2p+1)\int_\Omega |\eta'|^2 |h(\bar u)|^2 dx.$$

在 Ω 外视 $u = 0$, 根据 η 的定义及 (7.5.7), 由上式得出

$$\left(\int_{B_r(x_0)} |h(\bar u)|^{2^*} dx\right)^{\frac{2}{2^*}} \le \left(\int_\Omega |\eta h(\bar u)|^{2^*} dx\right)^{\frac{2}{2^*}}$$

$$\le 16C_1(2p+1) r^{-2} \int_\Omega \bar u^{2s} dx.$$

假如 $u \in L^p(\Omega)$, 注意 $2s = p$, $2^* = 2\beta$, 由上式得出

$$\int_{B_r(x_0)} |h(\bar{u})|^{2\beta} dx \le C_2 \left(\int_\Omega |u|^p dx \right)^\beta < \infty,$$

其中 $C_2 = [16C_1(2p+1)r^{-2}]^\beta$ 是与 n, p, r 有关而与 u 无关的正常数. 因为 $\lim\limits_{l\to\infty} h(\bar{u}) = \bar{u}^s$, 根据 Fatou 定理, 由上式得出

$$\int_{B_r(x_0)} |\bar{u}|^{2\beta s} dx \le \underline{\lim}_{t\to\infty} \int_{B_r(x_0)} |h(\bar{u})|^{2\beta} dx$$

$$\le C_2 \left(\int_\Omega |u|^p dx \right)^\beta < \infty.$$

此式又可写成

$$||\bar{u}||_{L^{\beta p}(B_r(x_0))} \le C||u||_{L^p(\Omega)},$$

其中 $C = C(n,p,r) = C_2^{\frac{1}{\beta p}} > 0$.

因为 $-u$ 与 u 同时是问题 (7.5.3) 在 $W_0^{1,2}(\Omega)$ 中的弱解, 所以对 $\tilde{u} = \max(-u, 0)$ 也可得出

$$||\tilde{u}||_{L^{\beta p}(B_r(x_0))} \le C||u||_{L^p(\Omega)}.$$

由于 $u = \bar{u} - \tilde{u}$, 于是有

$$||u||_{L^{\beta p}(B_r(x_0))} \le 2C||u||_{L^p(\Omega)}, \quad \forall x_0 \in \bar{\Omega}. \tag{7.5.12}$$

$\{B_r(x)|x \in \bar{\Omega}\}$ 为有界闭集 $\bar{\Omega}$ 的开覆盖, 所以存在有限开覆盖 $\{B_r(x_i)|x_i \in \bar{\Omega}, i = 1, \cdots, m\}$, 使得 $\bar{\Omega} \subset \bigcup_{i=1}^m B_r(x_i)$. 从而由 (7.5.12) 有

$$||u||_{L^{\beta p}(\Omega} \le \left(\int_{\bigcup_{i=1}^m B_r(x_i)} |u|^{\beta p} dx \right)^{\frac{1}{\beta p}} \le \left(\sum_{i=1}^m \int_{B_r(x_i)} |u|^{\beta p} dx \right)^{\frac{1}{\beta p}}$$

$$\le \sum_{i=1}^m \left(\int_{B_r(x_i)} |u|^{\beta p} dx \right)^{\frac{1}{\beta p}} \le 2mC||u||_{L^p(\Omega)}.$$

这就证明了命题 (7.5.6) 成立.

由嵌入定理 5.6.1 有：对 $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ 成立

$$u \in L^q(\Omega), \quad \forall q \in [2, 2^*] = [2, 2\beta].$$

假设对任意正整数 j 有

$$u \in L^q(\Omega), \quad \forall q \in [2\beta^{j-1}, 2\beta^j]. \tag{7.5.13}$$

则由 (7.5.6) 得出

$$u \in L^{\beta q}(\Omega), \quad \forall \beta q \in [2\beta^j, 2\beta^{j+1}].$$

因此，(7.5.13) 对任意正整数 j 都成立. 再由

$$[2, \infty) = \bigcup_{j=1}^{\infty} [2\beta^{j-1}, 2\beta^j]$$

得出 (7.5.4).

定理 7.5.4 设 Ω 是 R^n 中的 $C^{k+2,\alpha}$ 区域，在 $\bar{\Omega} \times R$ 上定义的函数 $f(x,u)$ 满足：

(f_1^k) 对任意正数 M 有

$$f(x,u) \in C^{k,\alpha}(\bar{\Omega} \times [-M, M], R);$$

(f_2^*) 当 $n \geq 3$ 时，$s = \dfrac{n+2}{n-2}$, 当 $n \leq 2$ 时，存在 $s > 1$, 使得

$$f(x,u) = O(|u|^s)(\text{当 } |u| \to \infty)$$

对 $x \in \bar{\Omega}$一致地成立;

(f_3^*) $\lim_{u \to 0} \dfrac{f(x,u)}{u} = a(x) \in L^\infty(\Omega)$.

那么，半线性椭圆方程 Dirichlet 问题 (7.5.1) 在 $W_0^{1,2}(\Omega)$ 中的弱解必定是古典解且有

$$u \in C^{k+2,\alpha}(\bar{\Omega}). \tag{7.5.14}$$

证 定义函数

$$g(x,u)=\begin{cases}\dfrac{f(x,u)}{u}, & \text{当 } u\neq 0,\\ a(x), & \text{当 } u=0.\end{cases} \tag{7.5.15}$$

由条件 (f_2^*), 存在正常数 b 及 M, 使得

$$\frac{|f(x,u)|}{|u|^s}\le b,\quad \text{当 } |u|\ge M.$$

从而有

$$|g(x,u)|\le b|u|^{s-1},\quad \text{当 } |u|\ge M. \tag{7.5.16}$$

由条件 (f_3^*), 存在 $m>0$, 使得

$$\left|\frac{f(x,u)}{u}-a(x)\right|<1,\quad \text{当 } 0<|u|\le m.$$

从而有

$$\left|\frac{f(x,u)}{u}\right|\le |a(x)|+1=c(x),\quad \text{当 } 0<|u|\le m.$$

由此式及 (7.5.15) 得出

$$|g(x,u)|\le c(x),\quad \text{当 } |u|\le m. \tag{7.5.17}$$

再由条件 (f_1^k), $g(x,u)=\dfrac{f(x,u)}{u}$ 在 $\bar{\Omega}\times[m,M]$ 上及 $\bar{\Omega}\times[-M,-m]$ 上均连续，因而有界，即存在正常数 d 使得

$$|g(x,u)|\le d\le \frac{d}{m^{s-1}}|u|^{s-1},\quad \text{当 } m\le |u|\le M.$$

由 (7.5.16), (7.5.17) 及上式得出

$$|g(x,u)|\le c(x)+\left(b+\frac{d}{m^{s-1}}\right)|u|^{s-1},\quad \forall (x,u)\in\bar{\Omega}\times R. \tag{7.5.18}$$

设 u 是半线性椭圆方程 Dirichlet 问题 (7.5.1) 在 $W_0^{1,2}(\Omega)$ 上的弱解. 由 (7.5.15) 知道 u 也是线性椭圆方程 Dirichlet 问题

$$\begin{cases} -\Delta u = h(x)u, & \text{在 } \Omega \text{ 中}, \\ u = 0, & \text{在 } \partial\Omega \text{ 上}, \end{cases}$$

在 $W_0^{1,2}(\Omega)$ 中的弱解, 其中

$$h(x) = g(x, u(x)).$$

当 $n \geq 3$ 时, 由嵌入定理 5.6.1 及 $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ 知道 $u \in L^{2^*}(\Omega)$. 这里 $2^* = \dfrac{2n}{n-2}$. 由 (7.5.18) 及 $c(x) = |a(x)| + 1 \in L^\infty(\Omega)$, 根据定理 6.2.1 得出

$$h(x) = g(x, u(x)) \in L^{\frac{n}{2}}(\Omega),$$

因为 $\dfrac{2^*}{s-1} = \dfrac{n}{2}$. 因此, 由引理 7.5.3 知道

$$u \in L^q(\Omega), \quad \forall q \in [2, \infty). \tag{7.5.19}$$

当 $n \leq 2$ 时, 根据嵌入定理 5.6.1 及 $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ 直接得出 (7.5.19).

由 (7.5.15), (7.5.18) 及条件 (f_3^*) 得出

$$|f(x,u)| \leq c(x)|u| + \left(b + \frac{d}{m^{s-1}}\right)|u|^s.$$

由此, 利用 Young 不等式

$$c(x)|u| \leq \frac{|u|^s}{s} + \frac{|c(x)|^{s'}}{s'}$$

得出

$$|f(x,u)| \leq \frac{|c(x)|^{s'}}{s'} + \left(b + \frac{d}{m^{s-1}} + \frac{1}{s}\right)|u|^s.$$

由此式及 (7.5.19), 根据定理 6.2.1 得出

$$f(x, u(x)) \in L^p(\Omega), \quad \forall p = \frac{q}{s} \in \left[\frac{2}{s}, \infty\right).$$

因此，由定理 7.5.2, Poisson 方程 Dirichlet 问题

$$\begin{cases} -\Delta v = f(x,u(x)), & 在\ \Omega\ 中, \\ v = 0, & 在\ \partial\Omega\ 上 \end{cases} \tag{7.5.20}$$

有唯一的解

$$v \in W_0^{1,p}(\Omega) \bigcap W^{2,p}(\Omega), \quad \forall p \in \left[\frac{2}{s}, \infty\right).$$

把这个函数 v 看成问题 (7.5.20) 在 $W_0^{1,2}(\Omega)$ 中的弱解，即 $v \in W_0^{1,2}(\Omega)$ 满足

$$\int_\Omega Dv \cdot D\phi dx = \int_\Omega f(x,u(x))\phi dx, \quad \forall \phi \in W_0^{1,2}(\Omega).$$

而 u 是半线性椭圆方程 Dirichlet 问题 (7.5.1) 在 $W_0^{1,2}(\Omega)$ 中的弱解，即 $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ 满足

$$\int_\Omega Du \cdot D\phi dx = \int_\Omega f(x,u(x))\phi dx, \quad \forall \phi \in W_0^{1,2}(\Omega).$$

于是有

$$\int_\Omega D(u-v) \cdot D\phi dx = 0, \quad \forall \phi \in W_0^{1,2}(\Omega).$$

在此式中取 $\phi = u - v \in W_0^{1,2}(\Omega)$ 得出

$$\int_\Omega |D(u-v)|^2 dx = 0.$$

由此式知道 $D(u-v) = 0$, 即 $u - v =$ 常数，但在边界 $\partial\Omega$ 上有 $u = v = 0$. 从而得出

$$u = v \in W_0^{1,p}(\Omega) \bigcap W^{2,p}(\Omega), \quad \forall p \in [\frac{2}{s}, \infty).$$

因此，对任意 $p > n$ 有 $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$. 从而根据嵌入定理 5.6.1 得出 $u \in C^\lambda(\bar{\Omega})$, $\lambda = 1 - \dfrac{n}{p}$. 这样一来存在正数 M 及 K 使得

$$|u(x)| \leq M, \quad \forall x \in \bar{\Omega},$$

$$|u(x)-u(y)| \le K|x-y|^\lambda, \quad \forall x,y\in\bar{\Omega}. \tag{H}$$

因为 Ω 是 $C^{k+2,\alpha}$ 区域, 由条件 (f_1^k) 可以推出条件 $(f_1^0), (f_1^1), \cdots, (f_1^{k-1})$ 也成立 (参阅文献 [12] 引理 6.35 的证明), 由条件 (f_1^0) 知道: 存在常数 $C>0$ 使得

$$|f(x,u)-f(y,v))| \le C(|x-y|^\alpha + |u-v|^\alpha),$$

$$\forall x,y\in\bar{\Omega}, \quad u,v\in[-M,M].$$

根据此式及 (H) 得出

$$\begin{aligned}|f(x,u(x))-f(y,u(y)))| &\le C(|x-y|^\alpha + |u(x)-u(y)|^\alpha)\\ &\le C(|x-y|^\alpha + K^\alpha|x-y|^{\lambda\alpha})\\ &\le C(d^{(1-\lambda)\alpha}+K^\alpha)|x-y|^{\lambda\alpha},\ \forall x,y\in\bar{\Omega},\end{aligned}$$

其中 $d=\mathrm{diam}\Omega$ 是 Ω 的直径. 这就证明了

$$f(x,u(x))\in C^{\lambda\alpha}(\bar{\Omega}).$$

因此, 由定理 7.5.1 知道, Dirichlet 问题 (7.5.20) 有唯一古典解 $v\in C^{2,\lambda\alpha}(\Omega)$. 从而有 $u=v\in C^{2,\lambda\alpha}(\bar{\Omega})\subset C^{0,1}(\bar{\Omega})$, 即 (H) 对 $\lambda=1$ 也成立. 由上面的推导得出

$$f(x,u(x))\in C^{\alpha}(\bar{\Omega}).$$

再由定理 7.5.1 得出, Dirichlet 问题 (7.5.20) 有唯一古典解 $u=v\in C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$.

我们可以用数学归纳法证明 (7.5.14) 成立. 上面已经证明 (7.5.14) 对 $k=0$ 成立. 假设 (7.5.14) 对 $k=m-1$ 成立, 即 $u\in C^{m+1,\alpha}(\bar{\Omega})\subset C^{m,1}(\bar{\Omega})$. 由条件 (f_1^m), 仿上面的推导可得

$$f(x,u(x))\in C^{m,\alpha}(\bar{\Omega}).$$

再根据定理 7.5.1 知道, Dirichlet 问题有唯一古典解 $u=v\in C^{m+2,\alpha}(\bar{\Omega})$. 这就证明了 (7.5.14) 对 k 也成立. 证完.

下面是古典解的强极 (小) 值原理.

定理 7.5.5 设 Ω 是 R^n 中的有界区域, 函数 $c(x)\in C^0(\bar{\Omega})$, 且在 Ω 中 $c(x)\geq 0$, $u\in C^0(\bar{\Omega})\bigcap C^2(\Omega)$.

(i) 如果 u 满足

$$Lu=-\Delta u+c(x)u>0,\quad 在\ \Omega\ 中, \tag{7.5.21}$$

则有

$$u>\min_{\partial\Omega}u^-,\quad 在\ \Omega\ 中, \tag{7.5.22}$$

其中 $u^-(x)=\min(u(x),0)$.

(ii) 如果 u 满足

$$\begin{cases} Lu=-\Delta u+c(x)u\geq 0, & 在\ \Omega\ 中,\\ u=0, & 在\ \partial\Omega\ 上\end{cases} \tag{7.5.23}$$

且 u 在 Ω 中不恒为零, 则有

$$u>0,\quad \forall\, x\in\Omega. \tag{7.5.24}$$

证 (i) 用反证法. 假设 (7.5.22) 不成立, 即存在 $x\in\Omega$ 使得

$$u(x)\leq\min_{\partial\Omega}u^-\leq 0,$$

则 u 在 $\bar{\Omega}$ 上的极小值在 Ω 中达到, 因而存在 $x_0\in\Omega$ 使得

$$u(x_0)=\min_{\bar{\Omega}}u\leq 0. \tag{7.5.25}$$

因为函数 $u(x)$ 在 x_0 处取最小值, 由初等微积分知道

$$D_1^2u(x_0)\geq 0,\quad D_2^2u(x_0)\geq 0,\cdots,D_n^2u(x_0)\geq 0. \tag{7.5.26}$$

由 (7.5.26) 及 (7.5.25) 得出

$$Lu(x_0)=-\Delta u(x_0)+c(x)u(x_0)\leq 0.$$

此时与假设 (7.5.21) 矛盾.

(ii) 仍用反证法. 设 (7.5.24) 不成立, 即存在 $x \in \Omega$ 使得 $u(x) \leq 0$. 因此, 由 (7.5.23) 的边界条件得知: 存在 $y \in \Omega$ 使得

$$u(y) = \min_{\Omega} u = \min_{\bar{\Omega}} u \leq 0.$$

因而集合

$$N = \{x \in \Omega | u(x) = \min_{\Omega} u\}$$

不是空集. 由于 u 在 Ω 中不恒为零, 于是 $N \neq \Omega$. 再由 N 是 Ω 中的相对闭集知道 $\partial N \bigcap \Omega \neq \Lambda$, 即存在 $y_1 \in \partial N \bigcap \Omega$.

设 $\mathrm{dist}(y_1, \partial\Omega) = 2\delta$, 取

$$y_2 \in \Omega \backslash N = \{x \in \Omega | u(y) > \min_{\Omega} u\},$$

使得 $|y_2 - y_1| < \delta$. 由于 $\Omega\backslash N$ 是 Ω 的开子集, 存在正数 $r \leq \delta$ 使得 $B_r(y_2) \subset \Omega\backslash N$. 命

$$r_0 = \sup\{r | B_r(y_2) \subset \Omega\backslash N\}$$

为球 $B_r(y_2) \subset \Omega\backslash N$ 的半径 r 的最大值, 则 $B_r(y_2)$ 与 N 相切. 设切点之一为 $x_1 \in \partial N \bigcap B_{r_0}(y_2)$. 在半径 $\overline{y_2 x_1}$ 中间取一点 $x_2 = \alpha y_2 + (1-\alpha)x_1 (0 < \alpha < 1)$, 命 $|x_1 - x_2| = \rho$, 则 $\overline{B_\rho(x_2)} \backslash \{x_1\} \subset \Omega\backslash N$.

再命

$$v(x) = e^{-k\rho^2} - e^{-k|x-x_2|^2},$$

则当 $\rho_1 < \rho$ 时, 可选取充分大的 k 使得

$$\begin{aligned} & Lv(x) = -\Delta v(x) + c(x)v(x) \\ & = [4k^2|x - x_2|^2 - 2kn]e^{-k|x-x_2|^2} + c(x)(e^{-k\rho^2} - e^{-k|x-x_2|^2}) \\ & \geq [4k^2|x - x_2|^2 - 2kn - c(x)]e^{-k|x-x_2|^2} \\ & > 0, \quad \forall x \in B_{\rho_1}(x_1). \end{aligned} \tag{7.5.27}$$

由于在 $B_{\rho_1}(x_1)$ 的部分边界 $\partial B_{\rho_1}(x_1)\bigcap\overline{B_\rho(x_2)}$ 上 $v(x)$ 是有界的而 $u(x)>\min_\Omega u$, 故存在常数 $M>0$ 及 m 使得

$$|v(x)|\le M,\quad u(x)\ge m>\min_\Omega u,\quad \forall x\in\partial B_{\rho_1}(x_1)\bigcap\overline{B_\rho(x_2)}.$$

再记

$$\lambda=\frac{1}{2M}(m-\min_\Omega u)>0,\quad w(x)=u(x)+\lambda v(x),$$

则有

$$w(x)\ge u(x)-\lambda|v(x)|\ge m-\lambda M>\min_\Omega u,$$
$$\forall x\in\partial B_{\rho_1}(x_1)\bigcap\overline{B_\rho(x_2)}.$$

在 $B_{\rho_1}(x_1)$ 的其余边界 $\partial B_{\rho_1}(x_1)\bigcap(\Omega\backslash\overline{B_\rho(x_2)})$ 上的点 x 处. 由于 $|x-x_2|>\rho$ 有

$$w(x)=u(x)+\lambda v(x)>u(x)\ge\min_\Omega u,$$
$$\forall x\in\partial B_{\rho_1}(x_1)\bigcap(\Omega\backslash\overline{B_\rho(x_2)}).$$

这就证明了

$$w(x)>\min_\Omega u=u(x_1),\quad \forall x\in\partial B_{\rho_1}(x_1).\tag{7.5.28}$$

由 (7.5.23) 及 (7.5.27) 有

$$Lw(x)=Lu(x)+\lambda Lv(x)>0,\quad \forall x\in B_{\rho_1}(x_1).$$

利用 (i) 的结果，由上式得出

$$w(x)>\min_{\partial B_{\rho_1}(x_1)}w^-,\quad \forall x\in B_{\rho_1}(x_1).\tag{7.5.29}$$

由 (7.5.28) 及 $u(x_1)=\min_\Omega u\le 0$ 有

$$\min_{\partial B_{\rho_1}(x_1)}w^-=\min_{x\in\partial B_{\rho_1}(x_1)}\min(w(x),0)\ge\min(u(x_1),0)=u(x_1).\tag{7.5.30}$$

由 $v(x_1)=0$, $w(x_1)=u(x_1)$ 及 $x\in B_{\rho_1}(x_1)$, 根据 (7.5.29) 得出

$$u(x_1)=w(x_1)>\min_{\partial B_{\rho_1}(x_1)} w^-. \tag{7.5.31}$$

(7.5.30) 与 (7.5.31) 是相矛盾的不等式.

推论 7.5.6 设 Ω 是 R^n 中的有界区域, 函数 $c(x)\in C^0(\bar{\Omega})$, 在 Ω 中 $c(x)\geq 0$, $u\in C^0(\bar{\Omega})\bigcap C^2(\Omega)$. 如果 u 是线性椭圆方程 Dirichlet 问题

$$\begin{cases} Lu=-\Delta u+c(x)u=0, & 在\ \Omega\ 中, \\ u=0, & 在\ \partial\Omega\ 上 \end{cases} \tag{7.5.32}$$

的解, 则在 Ω 中 u 恒等于零.

证 用反证法. 假设 u 在 Ω 中不恒为零, 则问题 (7.5.32) 的解 u 满足定理 7.5.5(ii) 的条件, 因而有

$$u(x)>0, \quad \forall x\in\Omega. \tag{7.5.33}$$

由于 $-u$ 也是问题 (7.5.32) 的解, 再由定理 7.5.5(ii) 又有

$$-u(x)>0, \quad \forall x\in\Omega. \tag{7.5.34}$$

(7.5.33) 与 (7.5.34) 是一对矛盾的结果.

注 此推论也可由问题 (7.5.32) 在 $W_0^{1,2}(\Omega)$ 中弱解的唯一性推出 (参阅 3.4 节).

7.6 半线性椭圆方程的古典解

当区域 Ω 及方程右端 $f(x,u)$ 适当光滑时, 定理 7.4.2 中的非平凡弱解不止一个, 而且他们都是古典解, 即有下列定理

定理 7.6.1 设 Ω 是 R^n 中的 $C^{1,1}$ 区域, 函数 $f(x,u)$ 满足条件 (f_1^0), (f_2), (f_3) 及 (f_4), 那么, 半线性椭圆方程 Dirichlet 问题 (7.4.5) 有两个非平凡解 $u,v\in C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$, 且他们满足

$$u(x)>0, \quad \forall x\in\Omega; \quad v(x)<0, \quad \forall x\in\Omega. \tag{7.6.1}$$

证 定义函数

$$\bar{f}(x,u)=\begin{cases} f(x,u), & \text{当 } u\geq 0, \\ 0, & \text{当 } u<0, \end{cases} \tag{7.6.2}$$

$$\bar{F}(x,u)=\int_0^u \bar{f}(x,t)dt.$$

易知 $\bar{f}(x,u)$ 也满足条件 (f_1^0), (f_2) 及 (f_3), 而 $\bar{f}(x,u)$ 与 $\bar{F}(x,u)$ 满足条件

(f_4')　$0<\mu\bar{F}(x,u)\leq u\bar{f}(x,u)$, 　当$(x,u)\in\bar{\Omega}\times[r,\infty)$.

对于 $E=W_0^{1,2}(\Omega)$ 上的泛函

$$\bar{I}(u)=\frac{1}{2}\int_\Omega |Du|^2dx-\int_\Omega \bar{F}(x,u)dx, \tag{7.6.3}$$

与定理 7.4.2 一样可以证明 $\bar{I}\in C^1(E,R)$ 且 $\bar{I}$ 满足山路引理 (定理 7.4.1) 的条件 (i) 及 P-S 条件. 现在再验证泛函 $\bar{I}$ 满足山路引理的条件 (ii). 由条件 (f_1^0) 及 (f_4'), 类似定理 7.4.2 中的推导得出

$$\bar{F}(x,u)\geq a_3u^\mu-a_4, \quad \text{当 } u\geq 0.$$

以此式代入 (7.6.3) 得出

$$\begin{aligned}\bar{I}(u)&\leq\frac{1}{2}\int_\Omega |Du|^2dx-\int_\Omega(a_3u^\mu-a_4)dx\\&=\frac{1}{2}\int_\Omega |Du|^2dx+a_4|\Omega|-a_3\int_\Omega u^\mu dx,\\&\quad\text{当 } u\in W_0^{1,2}(\Omega) \text{ 且} u\geq 0 \text{ 在 } \Omega \text{ 中}.\end{aligned}$$

取 $u\in E=W_0^{1,2}(\Omega)$ 满足 $\|u\|_E=1$ 且 $u\geq 0$ 在 Ω 中, 对 $t\in R$ 由 $\mu>2$ 及上式得出

$$\begin{aligned}\bar{I}(tu)&\leq\frac{t^2}{2}\int_\Omega |Du|^2dx+a_4|\Omega|-a_3t^\mu\int_\Omega u^\mu dx\\&\to-\infty, \quad \text{当 } t\to+\infty.\end{aligned}$$

因此，存在 $t > \rho$ 使得 $I(tu) \le 0$. 这就证明了存在 $e = tu \in E\backslash\overline{B_\rho(0)}$ 满足 $I(e) \le 0$.

这样一来，我们证明了泛函 $\bar{I}$ 满足山路引理的所有条件. 因而 $\bar{I}$ 有临界点 $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$. 此临界点 u 就是半线性椭圆方程 Dirichlet 问题

$$\begin{cases} -\Delta u = \bar{f}(x,u), & \text{在 } \Omega \text{ 中}, \\ u = 0, & \text{在 } \partial\Omega \text{ 上}, \end{cases} \tag{7.6.4}$$

在 $W_0^{1,2}(\Omega)$ 中的非平凡弱解. 再由定理 7.5.4 知道 $u \in C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$, 且 u 是问题 (7.6.4) 的古典解. 我们现在证明 $u(x)$ 是非负解，即

$$u(x) \ge 0, \quad \forall x \in \Omega. \tag{7.6.5}$$

假若 (7.6.5) 不成立，则集合

$$\Omega^- = \{x \in \Omega | u(x) < 0\}$$

是 Ω 的非空开子集. 因此，由 (7.6.4) 及 (7.6.2) 得到

$$\begin{cases} -\Delta u = 0, & \text{在 } \Omega^- \text{ 中}, \\ u = 0, & \text{在 } \partial\Omega^- \text{ 上}, \end{cases}$$

从而由推论 7.5.6 得出

$$u(x) = 0, \quad \forall x \in \Omega^-.$$

这就与 Ω^- 的定义矛盾。所以 (7.6.5) 成立.

下面再证明 u 是正解，即

$$u(x) > 0, \quad \forall x \in \Omega. \tag{7.6.6}$$

由 (7.6.5) 及 $\bar{f}$ 的定义 (7.6.2), (7.6.4) 可改写成

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x,u), & \text{在 } \Omega \text{ 中}, \\ u = 0, & \text{在 } \partial\Omega \text{ 上}. \end{cases} \tag{7.6.7}$$

命

$$g(x,u)=\begin{cases}-\dfrac{f(x,u)^-}{u}, & 当\ u\neq 0,\\ 0, & 当\ u=0,\end{cases}$$

其中 $f(x,u)^-=\min(f(x,u),0)$. 由条件 (f_3) 知道：对任意 $\epsilon>0$, 存在 $\delta=\delta(\epsilon)>0$, 使得当 $0<|u|<\delta$ 时有

$$|g(x,u)|\leq\left|\frac{f(x,u)^-}{u}\right|\leq\left|\frac{f(x,u)}{u}\right|<\epsilon.$$

这就是

$$g(x,u)\to 0,\quad 当u\to 0(关于x是一致的).$$

因此，由条件 (f_1^0) 知道 $g(x,u)\in C^0(\bar{\Omega}\times R,R)$. 从而

$$a(x)=g(x,u(x))\in C^0(\bar{\Omega}),$$

$$a(x)=g(x,u(x))\geq 0,\quad \forall x\in\bar{\Omega},$$

$$f(x,u(x))\geq f(x,u(x))^-=-g(x,u(x))u(x)=-a(x)u(x).$$

因此，由 (7.6.7) 知道： u 满足

$$\begin{cases}-\Delta u+a(x)u\geq 0, & 在\ \Omega\ 中,\\ u=0, & 在\ \partial\Omega\ 上.\end{cases}$$

而 u 是非平凡解，即 u 在 Ω 上不恒为零. 根据定理 7.5.5(ii) 得出 (7.6.6).

再命

$$\tilde{f}(x,u)=\begin{cases}-f(x,-u), & 当\ u\geq 0,\\ 0, & 当\ u<0,\end{cases}\tag{7.6.8}$$

$$\tilde{F}(x,u)=\int_0^u\tilde{f}(x,t)dt.$$

则 $\tilde{f}(x,u)$ 也满足条件 (f_1^0), (f_2) 及 (f_3), $\tilde{f}$ 与 $\tilde{F}$ 也满足条件 (f_4'). 因此，上面对 f 证明出的结论对 $\tilde{f}$ 也成立，即半线性椭圆方程 Dirichlet 问题

$$\begin{cases} -\Delta\tilde{u} = \tilde{f}(x,\tilde{u}), & \text{在 } \Omega \text{ 中}, \\ \tilde{u} = 0, & \text{在 } \partial\Omega \text{ 上} \end{cases} \tag{7.6.9}$$

有古典解 $\tilde{u} \in C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$, 满足

$$\tilde{u}(x) > 0, \quad \forall x \in \Omega. \tag{7.6.10}$$

由 (7.6.8) 及 (7.6.10), 根据 (7.6.9) 得出

$$\begin{cases} -\Delta\tilde{u} = -f(x,-\tilde{u}), & \text{在 } \Omega \text{ 中}, \\ \tilde{u} = 0, & \text{在 } \partial\Omega \text{ 上}. \end{cases}$$

令 $v(x) = -\tilde{u}(x)$, 则 $v(x) \in C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$ 满足

$$\begin{cases} -\Delta v = f(x,v), & \text{在 } \Omega \text{ 中}, \\ v = 0, & \text{在 } \partial\Omega \text{ 上}. \end{cases}$$

这样一来，我们证明了半线性椭圆方程 Dirichlet 问题 (7.4.5) 有两个古典解 $u, v \in C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$ 满足 (7.6.1). 证完.

以后，当问题 (7.4.5) 的解 u, v 满足条件 (7.6.1) 时，我们把 u 及 v 分别叫做问题 (7.4.5) 的正解及负解.

定理 7.6.2 设 Ω 是 R^n 中的 $C^{1,1}$ 区域，函数 $f(x,u)$ 满足条件 (f_1^0), (f_3) 及条件

(f_5) $\quad f(x,u)>0, \quad \forall (x,u)\in\bar{\Omega}\times(0,r), \quad f(x,r)=0, \quad \forall x\in\bar{\Omega}.$

那么，存在正数 λ_0, 使得 Laplace 算子的非线性特征值问题

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda f(x,u), & \text{在 } \Omega \text{ 中}, \\ u = 0, & \text{在 } \partial\Omega \text{ 上}, \end{cases} \tag{7.6.11}$$

对任意 $\lambda > \lambda_0$ 至少有两个不同的古典正解.

证 定义截割函数

$$\bar{f}(x,u)=\begin{cases} f(x,u), & \text{当 } (x,u)\in\bar{\Omega}\times(0,r), \\ 0, & \text{当 } (x,u)\in\bar{\Omega}\times[(-\infty,+\infty)\backslash(0,r)]. \end{cases} \tag{7.6.12}$$

则 $\bar{f}(x,u)$ 满足条件 (f_1^0), (f_3) 及 (f_5). 再命

$$\bar{F}(x,u)=\int_0^u \bar{f}(x,t)dt, \tag{7.6.13}$$

讨论 $E=W_0^{1,2}(\Omega)$ 上的泛函

$$I_\lambda(u)=\frac{1}{2}\int_\Omega |Du|^2dx-\lambda\int_\Omega \bar{F}(x,u)dx. \tag{7.6.14}$$

由条件 (f_5) 及 $f(x,u)$ 的连续性知道，存在 $a>0$ 使得

$$0\le f(x,u)\le a,\quad \forall(x,u)\in\bar{\Omega}\times[0,r]. \tag{7.6.15}$$

再由 (7.6.12) 有

$$0\le \bar{f}(x,u)\le a,\quad \forall(x,u)\in\bar{\Omega}\times R,$$

即 $\bar{f}(x,u)$ 也满足条件 (f_2). 因此，由定理 6.3.2 知道 $I_\lambda\in C^1(E,R)$ 且

$$\langle I'_\lambda(u),\phi\rangle=\int_\Omega (Du\cdot D\phi-\lambda\bar{f}(x,u)\phi)dx,\quad \forall\phi\in E. \tag{7.6.16}$$

由 (7.6.13), (7.6.12) 及 (7.6.15) 得出

$$0\le \bar{F}(x,u)\le ar,\quad \forall(x,u)\in\bar{\Omega}\times R.$$

因此，由 (7.6.14) 有

$$I_\lambda(u)\ge\frac{1}{2}\int_\Omega |Du|^2dx-|\lambda|\int_\Omega ardx. \tag{7.6.17}$$

对取定的 λ, 设 $\{u_m\}\subset E$, 且 $\{I_\lambda(u_m)\}$ 有界, 即存在正数 M 使得

$$|I_\lambda(u_m)|\le M,\quad m=1,2,\cdots$$

则由 (7.6.17) 得出

$$\frac{1}{2}||u_m||_E^2=\frac{1}{2}\int_\Omega |Du_m|^2dx\le M+ar|\lambda||\Omega|,$$

即 $\{u_m\}$ 在 E 中有界. 因此, 根据引理 7.2.2 之注得知, 泛函 I_λ 满足 P-S 条件. 再由 (7.6.17) 有

$$I_\lambda(u)\ge -ar|\lambda||\Omega|,\quad \forall u\in E=W_0^{1,2}(\Omega),$$

即泛函 I_λ 在 E 中有下界. 这样一来, 根据推论 7.3.2, I_λ 有临界点 u_λ 使得

$$I_\lambda(u_\lambda)=\inf_{v\in E} I_\lambda(v), \tag{7.6.18}$$

$$I'_\lambda(u_\lambda)=0. \tag{7.6.19}$$

等式 (7.6.19) 表明, u_λ 是 Laplace 算子非线性特征值问题

$$\begin{cases} -\Delta u=\lambda\bar{f}(x,u), & \text{在 } \Omega \text{ 中},\\ u=0, & \text{在 } \partial\Omega \text{ 上}, \end{cases} \tag{7.6.20}$$

在 $W_0^{1,2}(\Omega)$ 中的弱解. 为了使得到的这个弱解不是平凡解, 任意取定函数 $0\ne\eta(x)\in C_0^\infty(\Omega)$ 使得

$$0\le\eta(x)<r,\quad \forall x\in\Omega,$$

则由 (7.6.13), (7.6.12) 及条件 (f_5) 得出

$$\int_\Omega \bar{F}(x,\eta(x))dx>0.$$

从而由 (7.6.14) 得出

$$I_\lambda(\eta)=\frac{1}{2}||\eta||_E^2-\lambda\int_\Omega F(x,\eta(x))dx<0,$$

$$当\ \lambda > \lambda_0 = \frac{||\eta||_E^2}{2\int_\Omega F(x,\eta(x))dx} < 0.$$

因此，由 (7.6.18) 得出

$$I_\lambda(u_\lambda) \le I_\lambda(\eta) < 0, \quad \forall\lambda > \lambda_0. \tag{7.6.21}$$

由此知道

$$||u_\lambda||_E \ne 0, \quad \forall\lambda > \lambda_0. \tag{7.6.22}$$

这就证明了当 $\lambda > \lambda_0$ 时，弱解 u_λ 是问题 (7.6.20) 的非平凡解.

以下均假定 $\lambda > \lambda_0$. 我们来证明 u_λ 是非线性特征值问题 (7.6.11) 的古典正解. 由定理 7.5.4 知道，问题 (7.6.20) 的弱解 u_λ 必定是古典解，且 $u \in C^{2,\alpha}(\bar\Omega)$. 因此，由 (7.6.12) 及条件 (f_5) 得出： u_λ 满足

$$\begin{cases} -\Delta u_\lambda \ge 0, & 在\ \Omega\ 中, \\ u_\lambda = 0, & 在\ \partial\Omega\ 上, \end{cases}$$

而 $||u_\lambda||_E \ne 0$, 根据定理 7.5.5(ii) 得出

$$u_\lambda(x) > 0, \quad \forall x \in \Omega. \tag{7.6.23}$$

由 u_λ 满足 (7.6.20) 及 (7.6.12) 知道: 若 $\Omega^+ = \{x \in \Omega | u_\lambda(x) > r\} \ne \Lambda$, 则 u_λ 满足

$$\begin{cases} -\Delta u_\lambda = 0, & 在\ \Omega^+\ 中, \\ u_\lambda = 0, & 在\ \partial\Omega^+\ 上. \end{cases}$$

根据推论 7.5.6 得出 $u_\lambda(x) = 0, \forall x \in \Omega^+$, 与 Ω^+ 的定义矛盾. 因此 $\Omega^+ = \Lambda$, 即

$$u_\lambda(x) \le r, \quad \forall x \in \Omega. \tag{7.6.24}$$

由 (7.6.12), (7.6.23), (7.6.24), 根据 u_λ 满足 (7.6.20) 推出 u_λ 满足 (7.6.11). 再由 (7.6.23) 知道 u_λ 是非线性特征值问题 (7.6.11) 的古典正解.

再证明非线性特征值问题 (7.6.11), 还有另一个古典正解. 我们将证明 I_λ 满足山路引理的所有条件. 前面已经证明 I_λ 满足 P-S 条件. 现在来验证山路引理的条件 (i) 及 (ii).

(i) 由 $F(x,0)=0$ 得出 $I_\lambda(0)=0$. 根据定理 7.4.2 的证明, 当 $f(x,u)$ 满足条件 (f_1), (f_2), (f_3) 时, 对应的泛函 (7.4.8) 满足 (7.4.16). 因此, 由于 $\lambda\bar{f}(x,u)$ 满足条件 (f_1^0), (f_2), (f_3), 对应的泛函 (7.6.14) 满足

$$I_\lambda(u) \geq \frac{1}{4}||u||_E^2(1-4\lambda c_3||u||_E^{s-1}), \quad c_3>0, s>1.$$

记 $\rho=(8\lambda c_3)^{-\frac{1}{s-1}}$, 则由上式得出

$$I_\lambda(u) \geq \frac{1}{8}||u||_E^2, \quad \text{当} 0<||u||_E\leq\rho. \tag{7.6.25}$$

由此知道 $I_\lambda|_{\partial B_\rho(0)}=\dfrac{1}{8}\rho^2=\alpha>0$.

(ii) 因为 u_λ 满足 (7.6.21) 及 (7.6.22), 由 (7.6.25) 知道 $||u_\lambda||_E>\rho$, 即 $e=u_\lambda\in E\backslash\overline{\partial B_\rho(0)}$ 满足 $I_\lambda(e)<0$.

这就证明了泛函 I_λ 满足山路引理的所有条件. 因此, I_λ 又有临界点 $u_\lambda^+\in W_0^{1,2}(\Omega)$ 满足

$$I_\lambda(u_\lambda^+)\geq\alpha>0, \tag{7.6.26}$$

$$I_\lambda'(u_\lambda^+)=0. \tag{7.6.27}$$

由 (7.6.21) 及 (7.6.26) 知道

$$||u_\lambda^+||_E\neq0, \quad u_\lambda^+\neq u_\lambda.$$

再由 (7.6.27) 知道: u_λ^+ 是非线性特征值问题 (7.6.20) 的非平凡弱解. 与 u_λ 一样可以证明 u_λ^+ 也是非线性特征值问题 (7.6.11) 的古典正解.

注 1 如果 $a^{ij}(x), c(x)\in C^\alpha(\bar{\Omega})$ 满足

$$a^{ij}(x)=a^{ji}(x), \quad c(x)\geq0, \quad \forall x\in\bar{\Omega},$$

$$\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq k|\xi|^2, \quad \forall x \in \bar{\Omega}, \quad \xi \in R^n,$$

其中 $k > 0$. 将方程

$$-\Delta u = f(x, u)$$

改换为方程

$$-\sum_{i,j=1}^{n} [a^{ij}(x)D_j u] + c(x)u = f(x, u)$$

后定理 7.6.1 及定理 7.6.2 仍成立.

注 2 山路引理在微分方程中还有很多应用. 应用拓扑度和指标 (index) 理论, 由极小极大原理还可以建立山路引理的各种变形及推广, 这些广义及变形的山路定理不仅能应用于一些非线性椭圆方程的边值问题, 而且应用于半线性波动方程及 Hamilton 方程组都得出了重要的周期解存在定理. 参阅文献 [3] 及文献 [14].

第八章　具临界指数的半线性椭圆方程

在第七章所有半线性椭圆方程 Dirichlet 问题

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x,u), & \text{在 } \Omega \text{ 中}, \\ u = 0, & \text{在 } \partial\Omega \text{ 上} \end{cases} \tag{8.0.1}$$

解的存在定理中，除假定 R^n 中区域 Ω 及函数 $f(x,u)$ 在 $\bar{\Omega}\times R$ 上具有适当的光滑性外，均要求 $f(x,u)$ 满足条件 (f_2). 当 $n\geq 3$ 时，条件 (f_2) 要求 $f(x,u)$ 关于 u 的增长阶 s 小于 $\dfrac{n+2}{n-2}$, 即

$$f(x,u)=o(|u|^s) \quad (\text{当}|u|\to\infty), \quad \text{对 } x\in\bar{\Omega} \text{ 一致}, \tag{8.0.2}$$

其中 $0<s<\dfrac{n+2}{n-2}=2^*-1$. $2^*=\dfrac{2n}{n-2}$ 是 Sobolev 嵌入定理 5.6.1 的临界指数，即 2^* 是 Sobolev 嵌入

$$W_0^{1,2}(\Omega)\subsetneq\!\!\!\to L^s(\Omega) \tag{8.0.3}$$

成立的指数 s 中的最大者.

以后均假定 $n\geq 3$, Ω 是 R^n 中的有界区域.

我们讨论 Dirichlet 问题 (8.0.1) 在 $W_0^{1,2}(\Omega)$ 中的弱解，即满足积分等式

$$\int_\Omega Du\cdot D\phi dx=\int_\Omega f(x,u)\phi dx, \quad \forall\phi\in W_0^{1,2}(\Omega) \tag{8.0.4}$$

的函数 $u\in W_0^{1,2}(\Omega)$. 假如 $f(x,u)$ 关于 u 的增长阶是 s, 即 (8.0.2) 成立. 由 (8.0.2) 及 $f(x,u)$ 的连续性易证：存在正常数 a,b 使得

$$|f(x,u)|\leq a+b|u|^s. \tag{8.0.5}$$

因此，根据定理 6.2.1, 由 $u\in L^{2^*}(\Omega)$ 得出

$$f(x,u(x))\in L^{\frac{2^*}{s}}(\Omega). \tag{8.0.6}$$

因为 Ω 是有界区域，所以当

$$\frac{2^*}{s} \geq \frac{2^*}{2^*-1}, \quad 即 \quad s \leq 2^*-1 \tag{8.0.7}$$

时，由 (8.0.6) 推出

$$f(x,u(x)) \in L^{\frac{2^*}{2^*-1}}(\Omega).$$

从而，由 $\phi \in L^{2^*}(\Omega)$ 知道 $f(x,u(x))\phi(x)$ 可积，且由 Holder 不等式有

$$\left|\int_\Omega f(x,u)\phi dx\right| \leq \|f(x,u)\|_{\frac{2^*}{2^*-1}}\|\phi\|_{2^*}.$$

这就说明，条件 (8.0.7) 保证了积分等式 (8.0.4) 的右端是有意义的. 因此，在讨论 Dirichlet 问题 (8.0.1) 在 $W_0^{1,2}(\Omega)$ 中的弱解时，一般假定方程右端 $f(x,u)$ 关于 u 的增长阶 $s \leq 2^*-1$. 第七章讨论了 $s < 2^*-1$ 的情形. 本章将讨论 $s = 2^*-1$ 的情形，并称 (8.0.1) 中相应的半线性椭圆方程为具临界指数的方程.

在几何学与物理学中出现的具临界指数的半线性椭圆方程问题一般可归结为下列形状 [30]

$$\begin{cases} -\Delta u = au^{2^*-1} + g(x,u), & 在\ \Omega\ 中, \\ u > 0, & 在\ \Omega\ 中, \\ u = 0, & 在\ \partial\Omega\ 上, \end{cases} \tag{8.0.8}$$

其中 $g(x,u) = o(u^{-\frac{1}{2^*-2}})$ (当 $u \to \infty$) 对 $x \in \bar{\Omega}$ 一致地成立，$a > 0$. 记 $k = a^{-\frac{1}{2^*-2}}$, 作代换

$$u = kv, \quad \frac{1}{k}g(x,kv) = h(x,v),$$

则问题 (8.0.8) 简化为

$$\begin{cases} -\Delta v = v^{2^*-1} + h(x,v), & 在\ \Omega\ 中, \\ v > 0, & 在\ \Omega\ 中, \\ v = 0, & 在\ \partial\Omega\ 上. \end{cases} \tag{8.0.9}$$

这就是本章要讨论的具临界指数半线性椭圆方程边值问题.

在第七章讨论半线性椭圆方程 Dirichlet 问题 (8.0.1) 时，由于假定方程右端 $F(x,u)$ 关于 u 的增长阶 s 小于 2^*-1，根据定理 6.3.2，由嵌入 $W_0^{1,2}(\Omega)\overset{\subset}{\to}L^s(\Omega)$ 的紧性推出 $E=W_0^{1,2}(\Omega)$ 上泛函

$$J(u)=\int_\Omega F(x,u)dx,\quad F(x,u)=\int_\Omega f(x,t)dt$$

的 Fréchet 导数 $J':E\to E^*$ 是紧算子，从而保证了泛函

$$I(u)=\frac{1}{2}\int_\Omega |Du|^2dx-J(u)$$

在 $W_0^{1,2}(\Omega)$ 上满足 P-S 条件. 所以在 $f(x,u)$ 的一些补充假设下，利用山路引理 (或极小极大原理) 就可以得出临界点存在的结论. 但对于具临界指数的半线性椭圆方程 Dirichlet 问题 (8.0.9)，在 $W_0^{1,2}(\Omega)$ 上相应的泛函

$$I(v)=\frac{1}{2}\int_\Omega |Dv|^2dx-\frac{1}{2^*}\int_\Omega v^{2^*}dx-\int_\Omega\int_0^v h(x,t)dtdx$$

不满足 P-S 条件. 利用没有 P-S 条件的山路引理 (或极小极大原理) 只能得出临界序列的存在，为了证明临界序列的收敛性，需要新的工具和技巧.

8.1 波霍扎叶夫等式与不可解问题

定理 8.1.1[26] 设 Ω 是 R^n 中的 $C^{1,0}$ 区域，函数

$$f(x)\in C^1(-\infty,+\infty),\quad u\in C^2(\bar\Omega)\bigcap C^3(\Omega),$$

而且 u 是半线性椭圆方程 Dirichlet 问题

$$\begin{cases}-\Delta u=f(u), & \text{在 }\Omega\text{ 中},\\ u=0, & \text{在 }\partial\Omega\text{ 上}\end{cases}\tag{8.1.1}$$

的解，那么，波霍扎叶夫 (Pohozaev) 等式

$$2n\int_\Omega F(u)dx+(2-n)\int_\Omega uf(u)dx=\int_{\partial\Omega}(x\cdot\nu)|Du|^2ds\tag{8.1.2}$$

成立，其中 $F(u)=\int_0^u f(t)dt$, $\nu=\nu(x)$ 为点 $x\in\partial\Omega$ 上的外法线单位向量.

证 利用 Green 公式 (1.3.7), 由 (8.1.1) 得出

$$\int_\Omega |Du|^2dx=-\int_\Omega u\Delta udx=\int_\Omega uf(u)dx. \tag{8.1.3}$$

当 $x\in\partial\Omega$ 时， $F(u(x))=F(0)=0$, 利用欧拉公式 (1.3.6) 得出

$$\begin{aligned}0&=\int_{\partial\Omega}[xF(u)]\cdot\nu ds=\int_\Omega\sum_{i=1}^n D_i[x_iF(u)]dx\\&=n\int_\Omega F(u)dx+\int_\Omega(x\cdot Du)f(u)dx.\end{aligned}$$

由此式及 (8.1.1) 知道

$$\int_\Omega(x\cdot Du)\Delta udx=-\int_\Omega(x\cdot Du)f(u)dx=n\int_\Omega F(u)dx. \tag{8.1.4}$$

由 (8.1.1), (8.1.3) 及 (8.1.4), 并利用欧拉公式三次得出

$$\begin{aligned}&\int_{\partial\Omega}(x\cdot\nu)|Du|^2ds\\&=\int_{\partial\Omega}(x|Du|^2)\cdot\nu ds=\int_\Omega\sum_{i=1}^n D_i[x_i|Du|^2]dx\\&=n\int_\Omega|Du|^2dx+\int_\Omega\sum_{i=1}^n x_iD_i\left(\sum_{j=1}^n|D_ju|^2\right)dx\\&=n\int_\Omega uf(u)dx+2\int_\Omega\sum_{j=1}^n D_ju\sum_{i=1}^n x_iD_{ij}udx\\&=n\int_\Omega uf(u)dx-2\int_\Omega\sum_{j=1}^n uD_j\left(\sum_{i=1}^n x_iD_{ij}u\right)dx\end{aligned}$$

$$= n\int_\Omega uf(u)dx - 2\int_\Omega u\Delta u dx - 2\int_\Omega \sum_{i=1}^n ux_i D_i(\Delta u)dx$$

$$= (n+2)\int_\Omega uf(u)dx + 2\int_\Omega \sum_{i=1}^n D_i(ux_i)(\Delta u)dx$$

$$= (n+2)\int_\Omega uf(u)dx + 2n\int_\Omega u\Delta u dx + 2\int_\Omega (x\cdot Du)\Delta u dx$$

$$= (2-n)\int_\Omega uf(u)dx + 2n\int_\Omega F(u)dx$$

定理 8.1.2 设 $n \geq 3$, $\lambda \leq 0$. 对 R^n 中关于原点为严格星形的 $C^{3,\alpha}$ 区域, 问题

$$\begin{cases} -\Delta u = u^{2^*-1} + \lambda u, & \text{在 } \Omega \text{ 中}, \\ u > 0, & \text{在 } \Omega \text{ 中}, \\ u = 0, & \text{在 } \partial\Omega \text{ 上} \end{cases} \tag{8.1.5}$$

没有解.

证 设问题 (8.1.5) 在 $W_0^{1,2}(\Omega)$ 中有弱解 u. 由于

$$f(u) = \begin{cases} u^{2^*-1} + \lambda u, & \text{当 } u > 0, \\ 0, & \text{当 } u \leq 0 \end{cases}$$

满足定理 7.5.4 中的条件 (f_1^1), 即对任意正数 M 有

$$f(u) \in C^{1,\alpha}([-M, M], R),$$

其中 α 是满足 $0 < \alpha < 1$ 的任意数. 根据定理 7.5.4 知道, 问题 (8.1.5) 的弱解 u 必定是古典解, 而且有 $u \in C^{3,\alpha}(\bar{\Omega})$. 再由定理 8.1.1, 将 $f(u)$ 及

$$F(u) = \int_0^u f(t)dt = \begin{cases} \dfrac{1}{2^*}u^{2^*} + \dfrac{\lambda}{2}u^2, & \text{当 } u > 0, \\ 0, & \text{当 } u \leq 0 \end{cases}$$

代入等式 (8.1.2) 得出

$$2n\int_{\Omega}\left(\frac{1}{2^*}u^{2^*}+\frac{\lambda}{2}u^2\right)dx+(2-n)\int_{\Omega}(u^{2^*-1}+\lambda u^2)dx$$

$$=\int_{\partial\Omega}(x\cdot\nu)|Du|^2ds.$$

由 $2^*=\dfrac{2n}{n-2}$, 上式可简化为

$$2\lambda\int_{\Omega}u^2dx=\int_{\partial\Omega}(x\cdot\nu)|Du|^2ds. \tag{8.1.6}$$

因为 Ω 关于原点是严格星形的，故在 $\partial\Omega$ 上有 $x\cdot\nu>0$.

当 $\lambda<0$ 时，由 (8.1.6) 得出 $u\equiv 0$, 与 u 满足 (8.1.5) 矛盾.

当 $\lambda=0$ 时，由 (8.1.6) 知道

$$Du=0,\quad 在\ \partial\Omega\ 上.$$

在 Green 公式 (1.3.7) 中令 $v\equiv 1$, 再由上式得出

$$\int_{\Omega}\Delta udx=\int_{\partial\Omega}\frac{\partial u}{\partial\nu}dS=\int_{\partial\Omega}(\nu\cdot Du)dS=0. \tag{8.1.7}$$

再由 (8.1.5) 有

$$\int_{\Omega}\Delta udx=-\int_{\Omega}u^{2^*-1}dx<0.$$

此式与 (8.1.7) 矛盾. 证完.

8.2 具临界指数半线性椭圆方程零边值问题正解的存在问题

本节及本章以下各节的主要结果参见文献 [30], 且假设 $n\geq 3$, Ω 是 R^n 中的 $C^{2,\alpha}$ 区域. 讨论下列具临界指数半线性椭圆方程边值问题的正解的存在问题

$$\begin{cases}-\Delta u=u^{2^*-1}+f(x,u), & 在\ \Omega\ 中,\\ u>0, & 在\ \Omega\ 中,\\ u=0, & 在\ \partial\Omega\ 上,\end{cases} \tag{8.2.1}$$

其中 $f(x,u)$ 可写成

$$f(x,u) = a(x)u + g(x,u), \quad a(x) \in L^\infty(\Omega), \tag{8.2.2}$$

$g(x,u)$ 满足下列条件

(g_1) 对任意 $M>0$ 有

$$g(x,u) \in C^{0,\alpha}(\bar{\Omega} \times [-M,M], R);$$

(g_2) $g(x,u) = o(u^{2^*-1})$(当 $u \to \infty$) 对 $x \in \bar{\Omega}$ 一致地成立;

(g_3) $g(x,u) = o(u)$(当 $u \to 0^+$) 对 $x \in \bar{\Omega}$ 一致地成立.

再设算子 $-\Delta - a(x)$ 的最小特征值 λ 是正的, 即

$$\int_\Omega (|D\Phi|^2 - a(x)\Phi^2)dx \geq \lambda \int_\Omega \Phi^2 dx, \quad \forall \Phi \in W_0^{1,2}(\Omega), \lambda > 0. \tag{8.2.3}$$

引理 8.2.1 如果 $a(x) \in L^\infty(\Omega)$, 则条件 (8.2.3) 与下列条件等价

$$\int_\Omega (|D\Phi|^2 - a(x)\Phi^2)dx \geq \lambda' \int_\Omega |D\Phi|^2 dx, \quad \forall \Phi \in W_0^{1,2}(\Omega), \lambda' > 0. \tag{8.2.4}$$

证 利用 Friedrichs 不等式, 由 (8.2.4) 可直接推出 (8.2.3). 反之, 如 (8.2.3) 成立. 由 $a(x) \in L^\infty(\Omega)$ 可知: 存在正数 M 使得 $|a(x)| \leq M, \quad \forall x \in \Omega$. 取正数 $C \geq \dfrac{M}{\lambda} \geq \dfrac{a(x)}{\lambda}$. 由 (8.2.3) 推出

$$C\int_\Omega (|D\Phi|^2 - a(x)\Phi^2)dx \geq C\lambda \int_\Omega \Phi^2 dx \geq a(x) \int_\Omega \Phi^2 dx,$$

由此得出

$$(C+1)\int_\Omega (|D\Phi|^2 - a(x)\Phi^2)dx \geq \int_\Omega |D\Phi|^2 dx.$$

此式说明 (8.2.4) 对 $\lambda' = \dfrac{1}{C+1}$ 成立. 证完.

设 C 是使 Sobolev 嵌入不等式

$$||u||_{2^*} \le C||Du||_2, \quad \forall u \in W_0^{1,2}(\Omega) \tag{8.2.5}$$

成立的最小常数 C, 则 $S = C^{-2}$ 是满足

$$S||u||_{2^*}^2 \le ||Du||_2^2, \quad \forall u \in W_0^{1,2}(\Omega) \tag{8.2.6}$$

的最大常数，即

$$S = \inf_{0\ne u\in W_0^{1,2}(\Omega)} \frac{||Du||_2^2}{||u||_{2^*}^2} = \inf_{u\in W_0^{1,2}(\Omega), ||u||_{2^*}=1} \int_\Omega |Du|^2 dx. \tag{8.2.7}$$

称 S 为 Sobolev 嵌入 $W_0^{1,2}(\Omega) \subsetneq L^{2^*}(\Omega)$ 的最佳常数.

因为我们讨论的是问题 (8.2.1) 的正解，故可视

$$f(x,u) = 0, \quad \forall (x,u) \in \bar\Omega \times (-\infty, 0]. \tag{8.2.8}$$

命

$$F(x,u) = \int_0^\mu f(x,t)dt, \quad \forall (x,u) \in \bar\Omega \times R,$$

则问题 (8.2.1) 的解就是泛函

$$I(u) = \int_\Omega \left\{ \frac{1}{2}|Du|^2 - \frac{1}{2^*}|u|^{2^*} - F(x,u) \right\} dx \tag{8.2.9}$$

在 $W_0^{1,2}(\Omega)$ 中的正临界点.

定理 8.2.2 设 $f(x,u)$ 满足 (8.2.2), 条件 (g_1), (g_2), (g_3) 及 (8.2.3). 如果存在函数 $v \in W_0^{1,2}(\Omega)$, $v \ge 0$ 在 Ω 中，且 $v \ne 0$, 使得

$$\sup_{t\ge 0} I(tv) < \frac{1}{n} S^{\frac{n}{2}}, \tag{8.2.10}$$

则问题 (8.2.1) 有 (古典) 解.

证 设 ϵ 为任意正数. 由条件 (g_3), 存在正数 $m = m(\epsilon)$ 使得

$$|g(x,u)| \le \epsilon u, \quad \forall (x,u) \in \bar\Omega \times [0, m]. \tag{8.2.11}$$

由条件 (g_2), 又存在正数 $M=M(\epsilon)$ 使得

$$|g(x,u)|\le \epsilon u^{2^*-1},\quad \forall (x,u)\in\bar{\Omega}\times[M,\infty). \tag{8.2.12}$$

由条件 (g_1), 又存在正数 $G=G(\epsilon)$ 使得

$$|g(x,u)|\le G,\quad \forall (x,u)\in\bar{\Omega}\times[m,M].$$

由此式得出：对任意 $k\ge 1$ 有

$$|g(x,u)|\le \frac{G(\epsilon)}{m(\epsilon)^k}u^k=C(\epsilon,k)u^k,\quad \forall (x,u)\in\bar{\Omega}\times[m,M]. \tag{8.2.13}$$

将不等式 (8.2.11)~(8.2.13) 合并得出不等式

$$|g(x,u)|\le \epsilon u+C(\epsilon,k)u^k+\epsilon u^{2^*-1},\quad \forall (x,u)\in\bar{\Omega}\times[0,\infty),k\ge 1. \tag{8.2.14}$$

因此，由 (8.2.2) 得出

$$\begin{aligned}|f(x,u)|\le (\|a\|_\infty+\epsilon)u+C(\epsilon,k)u^k+\epsilon u^{2^*-1},\\ \forall (x,u)\in\bar{\Omega}\times[0,\infty),k\ge 1.\end{aligned} \tag{8.2.15}$$

此式中取 $\epsilon=k=1$ 得出

$$-f(x,u)\le \mu u+u^{2^*-1},\quad \forall (x,u)\in\bar{\Omega}\times[0,\infty), \tag{8.2.16}$$

其中 $\mu=\|a\|_\infty+1+\frac{G(1)}{m(1)}>0$.

讨论 $E=W_0^{1,2}(\Omega)$ 上的泛函

$$J(u)=\int_\Omega\left\{\frac{|Du|^2+\mu u^2-\mu(u^+)^2}{2}-\frac{1}{2^*}(u^+)^{2^*}-F(x,u^+)\right\}dx. \tag{8.2.17}$$

易证 $J\in C^1(E,R)$. 我们验证 J 满足山路引理 (定理 7.4.1) 的条件 (i) 及 (ii).

(i) 在 (8.2.14) 中取 $k=2^*-1$, 并利用 (8.2.2) 得出

$$f(x,u)\le a(x)u+\epsilon u+C(\epsilon)u^{2^*-1},\quad \forall (x,u)\in\bar{\Omega}\times[0,\infty). \tag{8.2.18}$$

由此又得

$$F(x,u) \le \frac{a(x)}{2}u^2 + \frac{\epsilon}{2}u^2 + \frac{C(\epsilon)}{2^*}u^{2^*}, \quad \forall (x,u) \in \bar{\Omega} \times [0,\infty). \tag{8.2.19}$$

因此，对任意 $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$, 由 (8.2.17) 得

$$J(u) \ge \int_\Omega \left\{ \frac{1}{2}|Du|^2 - \frac{1}{2^*}(u^+)^{2^*} - F(x,u^+) \right\} dx$$

$$\ge \int_\Omega \left\{ \frac{|Du|^2 - a(x)(u^+)^{2^*} - \epsilon(u^+)^2}{2} - \frac{C(\epsilon)+1}{2^*}(u^+)^2 \right\} dx$$

$$\ge \frac{1}{2}\int_\Omega \left\{ |Du|^2 - a(x)(u)^2 \right\} dx - \frac{\epsilon}{2}\int_\Omega u^2 dx - \frac{C(\epsilon)+1}{2^*}(u)^{2^*} dx.$$

由此式，利用 Friedrichs 不等式

$$\int_\Omega u^2 \le C_1 \int_\Omega |Du|^2 dx$$

及 (8.2.4) 得出

$$J(u) \ge \frac{\lambda'}{2}\int_\Omega |Du|^2 dx - \frac{C_1\epsilon}{2}\int_\Omega |Du|^2 dx - \frac{C(\epsilon)+1}{2^*}\|u\|_{2^*}^{2^*}.$$

取 $\epsilon = \dfrac{\lambda'}{2C_1}$, 利用嵌入不等式 (8.2.5) 由上式得

$$J(u) \ge \frac{\lambda'}{4}\int_\Omega |Du|^2 dx - \frac{C(\epsilon)+1}{2^*}C^{2^*}\|Du\|_2^{2^*}$$

$$= \frac{\lambda'}{4}\|Du\|_2^2 - C_2\|Du\|_2^{2^*}, \quad C_2 = \frac{C(\epsilon)+1}{2^*}C^{2^*}.$$

由此式知道：当 $\|u\|_E = \|Du\|_2 = (\frac{\lambda'}{8C_2})^{\frac{1}{2^*-2}} = \rho > 0$ 时

$$J(u) \ge \rho^2\left(\frac{\lambda'}{4} - C_2\rho^{2^*-2}\right) = \frac{1}{8}\lambda'\rho^2 > 0.$$

(ii) 在 (8.2.15) 中取 $k=1$, $\epsilon = \dfrac{1}{2}$ 得出

$$|f(x,u)| \le 2C_3 u + \frac{1}{2}u^{2^*-1}, \quad \forall (x,u) \in \bar{\Omega} \times [0,\infty),$$

其中 $2C_3 = \|a\|_\infty + \frac{1}{2} + C(\frac{1}{2}, 1) > 0$. 由此知

$$|F(x,u)| \le C_3 u^2 + \frac{1}{2 \cdot 2^*} u^{2^*}, \quad \forall (x,u) \in \bar{\Omega} \times [0,\infty).$$

因此，对任意 $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$, $u \ge 0$ 在 Ω 中，由 (8.2.17) 及 (8.2.9) 得出

$$\begin{aligned} J(u) &= I(u) \\ &\le \int_\Omega \left\{ \frac{1}{2}|Du|^2 - \frac{1}{2^*}u^{2^*} + C_3 u^2 + \frac{1}{2 \cdot 2^*} u^{2^*} \right\} \\ &= \int_\Omega \left\{ \frac{1}{2}|Du|^2 + C_3 u^2 - \frac{1}{2 \cdot 2^*} u^{2^*} \right\}. \end{aligned}$$

于是，对于 $v \in W_0^{1,2}(\Omega)$, $v \ge 0$ 在 Ω 中， $v \not\equiv 0$. 由 (8.2.10) 得出

$$\sup_{t \ge 0} J(tv) = \sup_{t \ge 0} I(tv) < \frac{1}{n} S^{\frac{n}{2}}. \tag{8.2.20}$$

$$J(tv) \le \frac{t^2}{2} \int_\Omega |Dv|^2 dx + C_3 t^2 \int_\Omega v^2 dx - \frac{t^{2^*}}{2 \cdot 2^*} \int_\Omega v^{2^*}, \quad \forall t > 0.$$

由此知

$$J(tv) \to -\infty, \quad 当\ t \to +\infty.$$

因而存在 $t_0 > \dfrac{\rho}{\|v\|_E}$ 使得 $J(t_0 v) \le 0$. 令 $e = t_0 v$, 则 $\|e\|_E = t_0 \|v\|_E > \rho$, 即 $e \in E \backslash \overline{B_\rho(0)}$, $J(e) \le 0$.

这就证明了 $E = W_0^{1,2}(\Omega)$ 上的泛函 J 满足山路引理 (定理 7.4.1) 的条件 (不含 P-S 条件). 因此，记

$$\Gamma = \{ g \in C([0,1], E) | g(0) = 0, g(1) = e \},$$

则 J 关于

$$c = \inf_{g \in \Gamma} \max_{t \in [0,1]} J(g(t))$$

有临界序列 $\{u_k\} \subset E$, 使得

$$J(u_k) \to c, \quad 当\ k \to \infty, \tag{8.2.21}$$

$$J'(u_k) \to 0, \text{ 在}E^*\text{中}, \quad \text{当 } k \to \infty. \tag{8.2.22}$$

由 (8.2.21), 存在常数 $K_1 > 0$ 使得

$$|J(u_k)| \le K_1, \quad k = 1, 2, \cdots. \tag{8.2.23}$$

由 (8.2.22), 存在常数 $K_2 > 0$, 使得

$$||J'(u_k)|| \le K_2, \quad k = 1, 2, \cdots.$$

由此知

$$|\langle J'(u_k), \Phi\rangle| \le K_2 ||\Phi||_E, \quad \forall \Phi \in E = W_0^{1,2}(\Omega), k = 1, 2, \cdots. \tag{8.2.24}$$

由 (8.2.17) 有

$$\langle J'(u), \Phi\rangle = \int_\Omega \{Du \cdot D\phi + \mu u\phi - \mu u^+\phi - (u^+)^{2^*-1} - f(x, u^+)\phi\} dx, \tag{8.2.25}$$

$$J(u) - \frac{1}{2}\langle J'(u), u\rangle = \frac{1}{n}\int_\Omega (u^+)^{2^*} dx - \int_\Omega \{F(x, u^+) - \frac{1}{2}uf(x, u^+)\} dx. \tag{8.2.26}$$

由 (8.2.15) 取 $k = 1$ 得出：对任意 $\epsilon > 0$ 有

$$|f(x, u)| \le \epsilon u^{2^*-1} + C(\epsilon)u, \quad \forall (x, u) \in \bar{\Omega} \times [0, \infty). \tag{8.2.27}$$

由于 $\frac{2}{2^*} + \frac{2}{n} = 1$, 即 $\frac{2^*}{2}$ 与 $\frac{n}{2}$ 为共轭指数，利用不等式 (5.1.5) 得出

$$C(\epsilon)u^2 \le \epsilon u^{2^*} + \epsilon^{-\frac{n-2}{2}} C(\epsilon)^{\frac{n}{2}} \le \epsilon u^{2^*} + C_1(\epsilon), \quad \forall u \ge 0.$$

由此，根据不等式 (8.2.27) 得出

$$|uf(x, u^+)| \le \epsilon(u^+)^{2^*} + C(\epsilon)(u^+)^2 \le 2\epsilon(u^+)^{2^*} + C_1(\epsilon),$$

$$\forall (x, u) \in \bar{\Omega} \times R. \tag{8.2.28}$$

$$|F(x, u)| \le \frac{\epsilon}{2^*}(u)^{2^*} + \frac{C(\epsilon)}{2}(u)^2 \le \left(\frac{\epsilon}{2^*} + \frac{\epsilon}{2}\right)(u)^{2^*} + \frac{C_1(\epsilon)}{2},$$

$$\forall(x,u)\in\bar{\Omega}\times[0,\infty). \tag{8.2.29}$$

由 (8.2.26), (8.2.23), (8.2.24), (8.2.28) 及 (8.2.29) 得

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{n}\int_\Omega (u^+)^{2^*}dx\\
&\le |J(u_k)|+\frac{1}{2}|\langle J'(u_k),u_k\rangle|+\int_\Omega |F(x,u_k^+)|dx+\frac{1}{2}\int_\Omega |u_k f(x,u_k^+)|dx\\
&\le K_1+\frac{1}{2}K_2||u_k||_E+\left(\frac{\epsilon}{2^*}+\frac{\epsilon}{2}+\epsilon\right)\int_\Omega (u_k^+)^{2^*}dx+C_1(\epsilon)|\Omega|.
\end{aligned}$$

此式中取 $\epsilon=\dfrac{1}{2n}$ 得出

$$\frac{1}{2n^2}\int_\Omega (u^+)^{2^*}dx\le K_1+C_1|\Omega|+\frac{1}{2}K_2||u_k||_E,$$

由此得

$$\int_\Omega (u_k^+)^{2^*}dx\le a+b||u_k||_E,\quad a>0,b>0. \tag{8.2.30}$$

在 (8.2.29) 中取 $\epsilon=1$, 由上式得出

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |F(x,u_k^+)|dx &\le \left(\frac{1}{2^*}+\frac{1}{2}\right)\int_\Omega (u_k^+)^{2^*}dx+\frac{C_1(1)}{2}|\Omega|\\
&\le \frac{n-1}{n}(a+b||u_k||_E)+\frac{C_1(1)}{2}|\Omega|\\
&=c+d||u_k||_E,\quad c>0,\ d>0.
\end{aligned} \tag{8.2.31}$$

由 (8.2.17) 及 (8.2.23) 有

$$\begin{aligned}
K_1 &\ge J(u_k)\\
&\ge \frac{1}{2}\int_\Omega |Du_k|^2dx-\frac{1}{2^*}\int_\Omega (u_k^+)^{2^*}dx-\int_\Omega |F(x,u_k^+)|dx.
\end{aligned}$$

根据 (8.2.30) 及 (8.2.31), 由上式得出

$$\frac{1}{2}||u||_E^2 = \frac{1}{2}\int_\Omega |Du_k|^2 dx$$

$$\le K_1 + \frac{1}{2^*}(a + b||u_k||_E) + c + d||u_k||_E$$

$$= c_1 + c_2||u_k||_E \le c_1 + c_2^2 + \frac{1}{4}||u_k||_E^2,$$

这里 c_1, c_2(以及今后的 c_3, c_4) 均表示正常数. 由上式得出

$$||u_k||_E \le 2\sqrt{c_1 + c_2^2} = c_3, \tag{8.2.32}$$

即 $\{u_k\}$ 是 $E = W_0^{1,2}(\Omega)$ 中的有界序列, 因而 $\{u_k\}$ 在 E 中是弱紧的 (参阅附录 3). 且由定理 5.7.1, 对任意 $q < 2^*$ 嵌入

$$E = W_0^{1,2}(\Omega) \underset{\rightarrow}{\subseteq} L^q(\Omega)$$

是紧嵌入, 因而 $\{u_k\}$ 有子序列, 此子序列仍记为 $\{u_k\}$, 使得

$$\begin{cases} u_k \rightharpoonup u & (\text{弱收敛}), \text{在 } W_0^{1,2}(\Omega) \text{ 中}, \\ u_k \to u & (\text{强收敛}), \text{在 } L^q(\Omega) \text{ 中 } \forall q < 2^*, \\ u_k \to u, & \text{a.e. 在 } \Omega \text{ 中}. \end{cases} \tag{8.2.33}$$

由 (8.2.5) 及 (8.2.32) 有

$$||u_k||_{2^*} \le C||u_k||_E \le Cc_3 = C_4. \tag{8.2.34}$$

由此知 $\{(u_k^+)^{2^*-1}\}$ 在 $L^{\frac{2^*}{2^*-1}}(\Omega)$ 中有界. 由 (8.2.27), 利用不等式 (5.1.5) 得

$$|f(x, u_k^+)| \le \epsilon(u_k^+)^{2^*-1} + C(\epsilon)u_k^+$$

$$\le 2\epsilon(u_k^+)^{2^*-1} + \epsilon^{-\frac{1}{2^*-2}}C(\epsilon)^{\frac{2^*-1}{2^*-2}}.$$

由此式, 根据定理 6.2.1 得出: $f(x, u_k^+)$ 在 $L^{\frac{2^*}{2^*-1}}(\Omega)$ 中有界. 因为 $L^{\frac{2^*}{2^*-1}}(\Omega)$ 中的有界集是弱紧的 (参见附录 3). 因而 $\{u_k\}$ 有子

序列，仍记为 $\{u_k\}$，使得

$$(u_k^+)^{2^*-1} \rightharpoonup (u^+)^{2^*-1} \quad (弱), 在 L^{\frac{2^*}{2^*-1}}(\Omega) 中,$$

$$f(x,u_k^+) \rightharpoonup f(x,u^+) \quad (弱), 在 L^{\frac{2^*}{2^*-1}}(\Omega) 中.$$

因为 $(L^{\frac{2^*}{2^*-1}}(\Omega))^* = L^{2^*}(\Omega)$，故上两式可改写成

$$\begin{cases} \int_\Omega (u_k^+)^{2^*-1}\phi dx \to \int_\Omega (u^+)^{2^*-1}\phi dx, & \forall \phi \in L^{2^*}(\Omega), \\ \int_\Omega f(x,u_k^+)\phi dx \to \int_\Omega f(x,u^+)\phi dx, & \forall \phi \in L^{2^*}(\Omega). \end{cases} \tag{8.2.35}$$

利用 (8.2.33) 及 (8.2.35)，由 (8.2.25) 得出：对任意 $\phi \in E = W_0^{1,2}(\Omega)$ 有

$$\begin{aligned} &\langle J'(u_k), \phi\rangle \\ &= \int_\Omega \{Du_k \cdot D\phi + \mu u_k\phi - \mu u_k^+\phi - (u_k^+)^{2^*-1}\phi - f(x,u_k^+)\phi\}dx \\ &\to \int_\Omega \{Du \cdot D\phi + \mu u\phi - \mu u^+\phi - (u^+)^{2^*-1}\phi - f(x,u^+)\phi\}dx. \end{aligned}$$

而由 (8.2.22) 有

$$|\langle J'(u_k), \phi\rangle| \le \|J'(u_k)\| \, \|\phi\|_E \to 0.$$

比较上面这两个式子得出

$$\int_\Omega \{Du \cdot D\phi + \mu u\phi - \mu u^+\phi - (u^+)^{2^*-1}\phi - f(x,u^+)\phi\}dx = 0,$$

$$\forall \phi \in W_0^{1,2}(\Omega). \tag{8.2.36}$$

在此式中取

$$\phi = u^- = \min(u,0) \in W_0^{1,2}(\Omega),$$

得出

$$\int_\Omega \{|Du^-|^2 + \mu(u^-)^2\}dx = 0.$$

由此得出

$$u^- = 0, \quad \text{a.e. 在 } \Omega \text{ 中},$$

即

$$u = u^+ \geq 0, \quad \text{a.e. 在 } \Omega \text{ 中}.$$

因此，(8.2.36) 可改写成

$$\int_\Omega \{Du \cdot D\phi + u^{2^*-1}\phi - f(x,u)\phi\}dx = 0, \quad \forall \phi \in W_0^{1,2}(\Omega),$$

即 u 是 Dirichlet 问题

$$\begin{cases} -\Delta u = u^{2^*-1} + f(x,u), & \text{在 } \Omega \text{ 中}, \\ u = 0, & \text{在 } \partial\Omega \text{ 上}, \end{cases} \tag{8.2.37}$$

在 $W_0^{1,2}(\Omega)$ 中的非负弱解.

今证明 $u \not\equiv 0$. 相反，假设 $u \equiv 0$. 由 (8.2.28) 及 (8.2.34) 有

$$\begin{aligned} \left| \int_\Omega u_k^+ f(x, u_k^+) dx \right| &\leq \epsilon \int_\Omega (u_k^+)^{2^*} dx + C(\epsilon) \int_\Omega (u_k^+)^2 dx \\ &\leq C_4^{2^*}\epsilon + C(\epsilon) \int_\Omega |u_k|^2 dx. \end{aligned} \tag{8.2.38}$$

由 (8.2.33) 知道

$$\int_\Omega |u_k|^2 dx \to \int_\Omega |u|^2 dx = 0. \tag{8.2.39}$$

因此，存在 $k_0 = k_0(\epsilon) > 0$ 使得

$$\int_\Omega |u_k|^2 dx < \frac{\epsilon}{C(\epsilon)}, \quad \text{当 } k > k_0.$$

以此式代入 (8.2.38) 得出

$$\left| \int_\Omega |u_k^+ f(x, u_k^+) dx \right|^2 < (C_4^{2^*} + 1)\epsilon, \quad \text{当 } k > k_0.$$

因为 ϵ 是任意正数，由此式得出

$$\int_\Omega u_k^+ f(x,u_k^+)dx \to 0, \quad \text{当 } k\to\infty. \tag{8.2.40}$$

同理，由 (8.2.29) 可推出

$$\int_\Omega F(x,u_k^+)dx \to 0, \quad \text{当 } k\to\infty. \tag{8.2.41}$$

由 (8.2.32) 知道：数列 $\{\|u_k\|_E^2\} = \{\|Du_k\|_2^2\}$ 有界，它必有收敛的子序列，此子序列仍记为 $\{\|Du_k\|_2^2\}$, 且设其极限值为 l, 即

$$\|Du_k\|_2^2 \to l, \quad \text{当 } k\to\infty. \tag{8.2.42}$$

在 (8.2.25) 中取 $u=\phi=u_k$, 令 $k\to\infty$. 利用极限关系 (8.2.22), (8.2.39), (8.2.40) 及 (8.2.42) 得出

$$\int_\Omega (u_k^+)^{2^*}dx \to l, \quad \text{当 } k\to\infty. \tag{8.2.43}$$

由 (8.2.6) 有

$$S\|u_k^+\|_{2^*}^2 \le S\|u_k\|_{2^*}^2 \le \|Du_k\|_{2^*}^2.$$

在此式中令 $k\to\infty$, 由 (8.2.42) 及 (8.2.43) 得出

$$Sl^{\frac{2}{2^*}} \le l, \quad \text{即 } S\le l^{\frac{2}{n}}. \tag{8.2.44}$$

由 (8.2.17), (8.2.42), (8.2.39), (8.2.43) 及 (8.2.41) 得出

$$J(u_k) \to \frac{l}{2} - \frac{l}{2^*} = \frac{l}{n}.$$

此式与 (8.2.21) 比较得出

$$\frac{l}{n} = c. \tag{8.2.45}$$

由 (8.2.45) 及 (8.2.44) 有

$$c \ge \frac{1}{n}S^{\frac{n}{2}}. \tag{8.2.46}$$

但由 c 的定义及 (8.2.20) 有

$$c \le \max_{t\in[0,1]} J(te) = \max_{t\in[0,1]} J(tt_0v) \le \sup_{t\ge 0} J(tv) < \frac{1}{n}S^{\frac{n}{2}}.$$

此式与 (8.2.46) 矛盾. 这就证明了 $u \not\equiv 0$.

由定理 7.5.4, Dirichlet 问题 (8.2.37) 在 $W_0^{1,2}(\Omega)$ 中的弱解 u 是古典解, 且 $u \in C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$. 由不等式 (8.2.16), (8.2.37) 可改写成

$$\begin{cases} -\Delta u + \mu u \ge 0, & \text{在 } \Omega \text{ 中}, \\ u = 0, & \text{在 } \partial\Omega \text{ 上}. \end{cases}$$

由此及 $u \not\equiv 0$, 根据定理 7.5.5(ii) 得出

$$u(x) > 0, \quad \text{在 } \Omega \text{ 中}.$$

由此式及 u 是问题 (8.2.37) 的古典解知道 u 是问题 (8.2.1) 的古典解. 证完.

定理 8.2.2 给出了问题 (8.2.1) 有解的比较一般的充分条件, 但是其中的关键条件 (8.2.10) 是难于直接验证的. 下面给出满足定理 8.2.2 的条件的一种方程. 以下几节再分别介绍几种满足定理 8.2.2 的条件的方程.

定理 8.2.3 设 $n \ge 3, \Omega$ 是 R^n 中的 $C^{2,\alpha}$ 区域, $a(x) \in L^\infty(\Omega)$ 满足条件 (8.2.3), $g(x,u)$ 满足条件 $(g_1) \sim (g_3)$, 且存在 Ω 的非空开子集 ω 及 $(0,\infty)$ 的非空开子区间 (a,b) 使得

$$\begin{cases} g(x,u) \ge 0, & \forall (x,u) \in \omega \times [0,\infty), \\ g(x,u) > 0, & \forall (x,u) \in \omega \times (a,b). \end{cases} \tag{8.2.47}$$

那么, 存在 $\mu_0 > 0$, 使得问题

$$\begin{cases} -\Delta u = u^{2^*-1} + a(x)u + \mu g(x,u), & \text{在 } \Omega \text{ 中}, \\ u > 0, & \text{在 } \Omega \text{ 中}, \\ u = 0, & \text{在 } \partial\Omega \text{ 上} \end{cases} \tag{8.2.48}$$

对任意 $\mu \geq \mu_0$ 有解.

证 不妨假设 $0 \in \omega$. 取 $\eta(x) \in C_0^{\infty}(\omega)$ 满足

$$\eta(0) = 1,\ 0 \leq \eta(x) \leq 1,\quad \forall x \in \omega. \tag{8.2.49}$$

再取定 $0 < k < \dfrac{1}{2}$, 命

$$u(x) = \eta(x)|x|^{-k},\ \eta(x) = 0,\ \forall x \in \Omega\backslash\omega. \tag{8.2.50}$$

经计算可验证

$$u \in W_0^{1,2}(\Omega).$$

再命

$$v(x) = \frac{u(x)}{||u||_{2^*}} \in W_0^{1,2}(\Omega), \tag{8.2.51}$$

因而有

$$v(x) = 0,\ \forall\ x \in \Omega\backslash\omega,\quad ||v||_{2^*} = 1. \tag{8.2.52}$$

问题 (8.2.48) 对应的泛函为

$$I_\mu(u) = \int_\Omega \left(\frac{1}{2}|Du|^2 - \frac{1}{2}a(x)u^2 - \frac{1}{2^*}u^{2^*} - \mu G(x,u)\right) dx,$$

其中 $G(x,u) = \displaystyle\int_0^u g(x,t)dt$. 于是

$$I_\mu(tv) = \frac{1}{2}At^2 - \frac{1}{2^*}t^{2^*} - \mu \int_\Omega G(x,tv)dx, \tag{8.2.53}$$

其中

$$A = \int_\Omega (|Dv|^2 - a(x)v^2)dx > 0.$$

由 (8.2.47) 及 (8.2.52) 有: 对任意 $t > 0$

$$G(x,tv(x)) = \int_0^{tv(x)} g(x,t)dt \geq 0,\quad \forall\ (x,t) \in \Omega \times [0,\infty).$$

根据 (8.2.53) 及上式得出：对 $\mu \ge 0$ 有

$$I_\mu(tv) \le \frac{1}{2}At^2 - \frac{1}{2^*}t^{2^*} \to -\infty, \quad 当 \ t \to +\infty.$$

因此 $I_\mu(tv)$ 在某个 t_μ $(t_\mu \ge 0)$ 处达到最大值 $\sup\limits_{t\ge 0} I_\mu(tv)$, 从而有

$$\frac{\partial}{\partial t}I_\mu(tv)|_{t=t_\mu} = At_\mu - t_\mu^{2^*-1} - \mu\int_\Omega g(x,t_\mu v)vdx = 0, \ 当 \ t_\mu > 0. \tag{8.2.54}$$

因此，由条件 (g_3) 及 (8.2.47) 得出

$$0 \le t_\mu \le A^{\frac{1}{2^*-2}} = A^{\frac{n-2}{4}}. \tag{8.2.55}$$

今证明

$$t_\mu \to 0, \quad 当 \ \mu \to \infty. \tag{8.2.56}$$

相反，设 (8.2.56) 不成立，则存在正数列 $\{\mu_j\}$, $\mu_j \to \infty$, 使得

$$t_{\mu_j} \to l > 0, \quad 当 \ \mu_j \to \infty. \tag{8.2.57}$$

由 (8.2.54), (8.2.55), 对正数 $\mu > 0$ 有

$$\int_\Omega g(x,t_\mu v)dx \le \frac{t_\mu A}{\mu} \le \frac{A^{\frac{n+2}{4}}}{\mu}.$$

根据 (8.2.47), (8.2.57) 及 Fatou 定理，由上式得出

$$\begin{aligned}0 &\le \int_\Omega g(x,lv)vdx \le \int_\Omega \lim_{\mu_j\to\infty} g(x,t_{\mu_j}v)vdx \\ &\le \lim_{\mu_j\to\infty}\int_\Omega g(x,t_{\mu_j}v)vdx \le \lim_{\mu_j\to\infty}\frac{A^{\frac{n+2}{4}}}{\mu_j} = 0.\end{aligned}$$

因而有

$$\int_\Omega g(x,lv)dx = 0. \tag{8.2.58}$$

由 (8.2.49) ~ (8.2.51) 有

$$lv(x) = \frac{l\eta(x)|x|^{-k}}{||u||_{2^*}}\begin{cases} \to +\infty, & 当 \ |x| \to 0, \\ = 0, & 当 \ |x| \to \partial\omega.\end{cases}$$

由 $lv(x)$ 的连续性知道, $lv(x)$ 在 ω 中可取区间 $[0,+\infty)$ 中的任意值. 因此, 对 $m=\dfrac{a+b}{2}\in(a,b)\subset[0,\infty)$, 存在 $x_0\in\omega$ 使得

$$lv(x_0)=m>0.$$

由条件 (8.2.47) 得

$$g(x_0,lv(x_0))v(x_0)=g(x_0,m)v(x_0)>0.$$

因此, 再由 $g(x,u)$ 的连续性条件 (g_1) 得出

$$\int_\Omega g(x,lv)vdx\geq\int_\omega g(x,lv(x))v(x)dx>0.$$

此式与 (8.2.58) 相矛盾. 这就证明了 (8.2.56) 成立.

由 (8.2.53) 及 (8.2.56) 得出

$$\sup_{t\geq 0}I_\mu(tv)=I_\mu(t_\mu v)\leq\frac{A}{2}t_\mu^2-\frac{1}{2^*}t_\mu^{2^*}\to 0,\quad 当\ \mu\to\infty.$$

因此, 存在 $\mu_0>0$ 使得

$$\sup_{t\geq 0}I_\mu(tv)<\frac{1}{n}S^{\frac{n}{2}},\quad 当\ \mu\geq\mu_0,$$

即所选取的 $v(x)$ 满足条件 (8.2.10). 由定理 8.2.2 得出: 当 $\mu\geq\mu_0$ 时, 问题 (8.2.48) 有 (古典) 解.

注 1 满足定理 8.2.3 中的条件的最简单方程是 $a(x)\equiv 0$, $g(x,u)=u^q$, $1<q<2^*-1$ 的情形, 即当 $n\geq 3$, Ω 是 R^n 中的 $C^{1,\alpha}$ 区域时, 必存在 $\mu_0>0$, 使得对任意 $\mu>\mu_0$, 问题

$$\begin{cases}-\Delta u=u^{2^*-1}+\mu u^q, & 在\ \Omega\ 中,\quad 1<q<2^*-1,\\ u>0, & 在\ \Omega\ 中,\\ u=0, & 在\ \Omega\ 上\end{cases}\tag{8.2.59}$$

有古典解 $u\in C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$.

注 2 在本章最后 3 节将进一步得出：当 $n \geq 4$ 或 $n = 3 < q < 2^* - 1 = 5$ 时，对任意 $\mu > 0$, 问题 (8.2.59) 有古典解.

8.3 方程 $-\Delta u = u^{2^*-1} + \lambda u$ 零边值问题正解的存在定理

设 $n \geq 3$. 定理 8.1.2 指出，问题

$$\begin{cases} -\Delta u = u^{2^*-1} + \lambda u, & \text{在 } \Omega \text{ 中}, \\ u > 0, & \text{在 } \Omega \text{ 中}, \\ u = 0, & \text{在 } \Omega \text{ 上} \end{cases} \tag{8.3.1}$$

对任意区域 Ω 有解的一个必要条件是 $\lambda > 0$. 在问题 (8.2.1) 中取 $a(x) = \lambda$, $g(x,u) \equiv 0$, $f(x,u) = \lambda u$, 就得到问题 (8.3.1).

此时条件 $(\mathrm{g}_1) \sim (\mathrm{g}_3)$ 自然满足. 设算子 $-\Delta$ 在 $W_0^{1,2}(\Omega)$ 中的第一个特征值为 λ_1, 由 (3.5.7)

$$\lambda_1 = \inf_{0 \neq u \in W_0^{1,2}(\Omega)} \frac{\|Du\|_2^2}{\|u\|_2^2}. \tag{8.3.2}$$

从而有

$$\lambda_1 \leq \frac{\|D\Phi\|_2^2}{\|\Phi\|_2^2} = \frac{\displaystyle\int_\Omega |D\Phi|^2 dx}{\displaystyle\int_\Omega |\Phi|^2 dx}, \quad \forall 0 \neq \Phi \in W_0^{1,2}(\Omega).$$

$$\int_\Omega (|D\Phi|^2 - \lambda_1 \Phi^2) dx \geq 0, \quad \forall \Phi \in W_0^{1,2}(\Omega).$$

因此，对任意 $\lambda \in (0, \lambda_1)$, 令 $\alpha = \lambda_1 - \lambda > 0$, 则有

$$\int_\Omega (|D\Phi|^2 - \lambda \Phi^2) dx \geq \alpha \int_\Omega \Phi^2 dx, \quad \forall \Phi \in W_0^{1,2}(\Omega),$$

即条件 (8.2.3) 成立.

这样一来，如果我们能证明对 $\lambda \in (0, \lambda_1)$, 满足定理 8.2.2 的条件 (8.2.10) 的 $v \in W_0^{1,2}(\Omega)$ 存在，则问题 (8.3.1) 有 (古典) 解.

由 (8.2.7), Sobolev 嵌入 $W^{1,2}(\Omega)\subsetneq L^{2^*}(\Omega)$ 的最佳常数是

$$S=\inf_{0\neq u\in W_0^{1,2}(\Omega)}\frac{\|Du\|_2^2}{\|u\|_2^2}. \tag{8.3.3}$$

已经知道 (参阅文献 [30] 及文献 [36]): S 只与 n 有关而与 Ω 无关, 对任意有界区域 Ω, 下确界 (8.3.3) 绝对不能达到. 而当 $\Omega=R^n$ 时下确界 (8.3.3) 由函数

$$U_\epsilon(x)=\frac{C_\epsilon}{(\epsilon+|x|^2)^{\frac{n-2}{2}}},\quad \epsilon>0$$

达到.

引理 8.3.1 设 $n\geq 4$, 命

$$Q_\lambda(u)=\frac{\|Du\|_2^2-\lambda\|u\|_2^2}{\|u\|_{2^*}^2}, \tag{8.3.4}$$

$$S_\lambda=\inf_{0\neq u\in W_0^{1,2}(\Omega)}Q_\lambda(u), \tag{8.3.5}$$

则有

$$S_\lambda<S,\quad \forall\lambda>0. \tag{8.3.6}$$

证 因为 $Q_\lambda(u)$ 在坐标平移下是不变的. 不失其普遍性, 可设 $B_\delta(0)\subset\Omega\subset B_R(0)$, 选取截割函数 $\eta(x)\in C_0^\infty(\Omega)$ 使得

$$\begin{cases}\eta(x)=\begin{cases}1, & 当\ x\in B_\delta(0),\\ 0, & 当\ x\in R^n\backslash\Omega,\end{cases}\\ 0\leq\eta(x)\leq 1,\quad \forall x\in R^n,\\ |D\eta(x)|\leq C=\text{const},\quad \forall x\in R^n.\end{cases} \tag{8.3.7}$$

现在对于

$$u_\epsilon(x)=\frac{\eta(x)}{(\epsilon+|x|^2)^{\frac{n-2}{2}}} \tag{8.3.8}$$

估计 $Q_\lambda(u_\epsilon)$. 为此, 我们先证明: 当 $\epsilon\to 0$ 时有

$$\|u_\epsilon\|_{2^*}^2=\|U\|_{2^*}^2\epsilon^{-\frac{n-2}{2}}+O(\epsilon),\quad 当\ n\geq 3, \tag{8.3.9}$$

$$\|u_\epsilon\|_2^2 = \begin{cases} K_1\epsilon^{-\frac{n-4}{2}} + O(1), & \text{当 } n \geq 5, \\ 2\omega_4|\ln\epsilon| + O(1), & \text{当 } n = 4, \end{cases} \tag{8.3.10}$$

$$\|Du_\epsilon\|_2^2 = \|DU\|_2^2\epsilon^{-\frac{n-2}{2}} + O(1), \quad \text{当 } n \geq 3, \tag{8.3.11}$$

其中函数

$$U(x) = \frac{1}{(1+|x|^2)^{\frac{n-2}{2}}} \tag{8.3.12}$$

是当 $\Omega = R^n$ 时取得下确界 (8.3.3) 的函数，即

$$\frac{\|DU\|_2^2}{\|U\|_{2^*}^2} = S = \inf_{0\neq u\in W_0^{1,2}(R^n)} \frac{\|Du\|_2^2}{\|u\|_{2^*}^2}, \tag{8.3.13}$$

$$K_1 = \int_{R^n} \frac{dx}{(1+|x|^2)^{n-2}} \ (n \geq 5) \tag{8.3.14}$$

为正常数，$\omega_n = \dfrac{2\pi^{n/2}}{n\Gamma(\frac{n}{2})}$ 是 R^n 中单位球 $B_1(0)$ 的体积，从而 $n\omega_n$ 是 R^n 中单位球面 $\partial B_1(0)$ 的面积.

(8.3.9) 的证明　由 (8.3.8) 有

$$\|u_\epsilon\|_{2^*}^{2^*} = \int_\Omega |u_\epsilon|^{2^*}dx = \int_{R^n} \frac{\eta^{2^*}(x)}{(\epsilon+|x|^2)^n}dx.$$

利用变数代换 $x = \epsilon^{\frac{1}{2}}y$ 得出

$$\int_{R^n} \frac{dx}{(\epsilon+|x|^2)^n} = \epsilon^{-\frac{n}{2}} \int_{R^n} \frac{dy}{(1+|y|^2)^n} = \epsilon^{-\frac{n}{2}}\|U\|_{2^*}^{2^*}.$$

因而有

$$\epsilon^{-\frac{n}{2}}\|U\|_{2^*}^{2^*} - \|u_\epsilon\|_{2^*}^{2^*} = \int_{R^n\setminus B_\delta(0)} \frac{1-\eta^{2^*}(x)}{(\epsilon+|x|^2)^n}dx.$$

于是

$$\begin{aligned} 0 &\leq \epsilon^{-\frac{n}{2}}\|U\|_{2^*}^{2^*} - \|u_\epsilon\|_{2^*}^{2^*} \\ &\leq \int_{R^n\setminus B_\delta(0)} \frac{dx}{(\epsilon+|x|^2)^n} \leq \int_{R^n\setminus B_\delta(0)} \frac{dx}{|x|^{2n}} \\ &= n\omega_n \int_\delta^\infty \frac{r^{n-1}dr}{r^{2n}} = \omega_n\delta^{-n} = K_2 = \text{const.} \end{aligned}$$

由此得出

$$0 \le 1 - ||u_\epsilon||_{2^*}^{2^*}\ ||U||_{2^*}^{-2^*}\epsilon^{\frac{n}{2}} \le K_2||U||_{2^*}^{-2^*}\epsilon^{\frac{n}{2}},$$

$$1 - K_2||U||_{2^*}^{-2^*}\epsilon^{\frac{n}{2}} \le ||u_\epsilon||_{2^*}^{2^*}||U||_{2^*}^{-2^*}\epsilon^{\frac{n}{2}} \le 1.$$

当 ϵ 充分小 (使 $K_2||U||_{2^*}^{-2^*}\epsilon^{\frac{n}{2}} < 1$), 由于 $\dfrac{2}{2^*} = \dfrac{n-2}{n} < 1$, 由上式得出

$$1-K_2||U||_{2^*}^{-2^*}\epsilon^{\frac{n}{2}} \le (1- K_2||U||_{2^*}^{-2^*}\epsilon^{\frac{n}{2}})^{2/2^*} \le ||u_\epsilon||_{2^*}^2||U||_{2^*}^{-2}\epsilon^{\frac{n-2}{2}} \le 1.$$

从而有

$$||U||_{2^*}^2\epsilon^{-\frac{n-2}{2}} - K_2||U||_{2^*}^{2-2^*}\epsilon \le ||u_\epsilon||_{2^*}^2 \le ||U||_{2^*}^2\epsilon^{-\frac{n-2}{2}}.$$

由此式得出 (8.3.9).

(8.3.10) 的证明 由 (8.3.8) 有

$$||u_\epsilon||_2^2 = \int_\Omega |u_\epsilon|^2 dx = \int_\Omega \frac{\eta^2(x)}{(\epsilon+|x|^2)^{n-2}}dx = J_1 + J_2, \qquad (8.3.15)$$

其中

$$J_1 = \int_\Omega \frac{\eta^2(x)-1}{(\epsilon+|x|^2)^{n-2}}dx, \quad J_2 = \int_\Omega \frac{dx}{(\epsilon+|x|^2)^{n-2}}.$$

由 (8.3.7) 知道

$$|J_1| \le \int_{B_R(0)\setminus B_\delta(0)} \frac{dx}{|x|^{2(n-2)}} = n\omega_n \int_\delta^R \frac{r^{n-1}dr}{r^{2(n-2)}}.$$

由此得出

$$|J_1| \le \begin{cases} n\omega_n \displaystyle\int_\delta^R r^{3-n}dr = \frac{n}{n-4}\omega_n(\delta^{4-n} - R^{4-n}), & \text{当 } n \ge 5, \\ 4\omega_4 \displaystyle\int_\delta^R \frac{dr}{r} = 4\omega_4 \ln\frac{R}{\delta}, & \text{当 } n = 4. \end{cases} \qquad (8.3.16)$$

当 $n \geq 5$ 时，由

$$\int_{R^n} \frac{dx}{(\epsilon+|x|^2)^{n-2}} = \epsilon^{-\frac{n-4}{2}} \int_{R^n} \frac{dy}{(1+|y|^2)^{n-2}} = K_1 \epsilon^{-\frac{n-4}{2}}$$

得出

$$\begin{aligned} |J_2 - K_1 \epsilon^{-\frac{n-4}{2}}| &= \int_{R^n \setminus \Omega} \frac{dx}{(\epsilon+|x|^2)^{n-2}} \\ &\leq \int_{R^n \setminus B_\delta(0)} \frac{dx}{|x|^{2(n-2)}} = \frac{n}{n-4} \omega_n \delta^{4-n}, \quad \text{当 } n \geq 5. \end{aligned} \tag{8.3.17}$$

当 $n=4$ 有

$$\begin{aligned} J_2 &\leq \int_{B_R(0)} \frac{dx}{(\epsilon+|x|^2)^2} = 4\omega_4 \int_0^R \frac{r^3 dr}{(\epsilon+r^2)^2} \\ &= 2\omega_4 \left(\ln \frac{\epsilon+R^2}{\epsilon} - \frac{R^2}{\epsilon+R^2} \right) \\ &\leq 2\omega_4 |\ln \epsilon| + 2\omega_4 \ln(1+R^2), \quad \text{当 } 0<\epsilon<1. \end{aligned}$$

由 $0<\delta<1$, 同上计算可得

$$\begin{aligned} J_2 &\geq \int_{B_\delta(0)} \frac{dx}{(\epsilon+|x|^2)^2} = 2\omega_4 \left(\ln \frac{\epsilon+\delta^2}{\epsilon} - \frac{\delta^2}{\epsilon+\delta^2} \right) \\ &\geq 2\omega_4 |\ln \epsilon| - 2\omega_4 (2|\ln \delta|+1), \quad \text{当 } 0<\epsilon<1. \end{aligned}$$

于是得出

$$\begin{gathered} |J_2 - 2\omega_4 |\ln \epsilon|\,| \leq 2\omega_4 \max\{\ln(1+R^2), 2|\ln \delta|+1\}, \\ \text{当 } 0<\epsilon<1, \quad n=4. \end{gathered} \tag{8.3.18}$$

由 (8.3.15)~(8.3.18) 得出 (8.3.10).

(8.3.11) 的证明 对 (8.3.8) 微分得

$$Du_\epsilon(x) = \frac{D\eta(x)}{(\epsilon+|x|^2)^{\frac{n-2}{2}}} - \frac{(n-2)\eta(x)x}{(\epsilon+|x|^2)^{n/2}}.$$

因而

$$|Du_\epsilon(x)|^2=\frac{|D\eta(x)|^2}{(\epsilon+|x|^2)^{n-2}}-2(n-2)\frac{\eta(x)x\cdot D\eta(x)}{(\epsilon+|x|^2)^{n-1}}+(n-2)^2\frac{\eta^2(x)|x|^2}{(\epsilon+|x|^2)^n}.$$

由 (8.3.12) 得

$$(n-2)^2\int_{R^n}\frac{|x|^2}{(\epsilon+|x|^2)^n}dx$$

$$=\epsilon^{-\frac{n-2}{2}}(n-2)^2\int_{R^n}\frac{|y|^2}{(1+|y|^2)^n}dx=\epsilon^{-\frac{n-2}{2}}\|DU\|_2^2.$$

由上面这两个式子及 (8.3.7) 得出

$$\left|\,\|Du_\epsilon\|_2^2-\epsilon^{-\frac{n-2}{2}}\|DU\|_2^2\,\right|$$

$$=\left|\int_\Omega|DU_\epsilon(x)|^2dx-(n-2)^2\int_{R^n}\frac{|x|^2}{(\epsilon+|x|^2)^n}dx\right|$$

$$\le\int_\Omega\frac{|D\eta(x)|^2}{(\epsilon+|x|^2)^{n-2}}dx+2(n-2)\left|\int_\Omega\frac{\eta(x)x\cdot D\eta(x)}{(\epsilon+|x|^2)^{n-1}}dx\right|$$

$$+(n-2)^2\int_{R^n\backslash\Omega}\frac{|x|^2}{(\epsilon+|x|^2)^n}dx+(n-2)^2\int_\Omega\frac{|\eta^2(x)-1|\;|x|^2}{(\epsilon+|x|^2)^n}dx$$

$$\le C^2\int_{B_R(0)\backslash B_\delta(0)}\frac{dx}{(\epsilon+|x|^2)^{n-2}}+2(n-2)C\int_{B_R(0)\backslash B_\delta(0)}\frac{|x|}{(\epsilon+|x|^2)^{n-1}}dx$$

$$+(n-2)^2\int_{R^2\backslash\Omega}\frac{|x|^2dx}{(\epsilon+|x|^2)^n}+(n-2)^2\int_{\Omega\backslash B_\delta(0)}\frac{|x|^2dx}{(\epsilon+|x|^2)^n}$$

$$\le C^2n\omega_n\int_\delta^R\frac{r^{n-1}dr}{r^{2(n-2)}}+2(n-2)Cn\omega_n\int_\delta^R\frac{r^ndr}{r^{2(n-1)}}$$

$$+(n-2)^2n\omega_n\int_\delta^\infty\frac{r^{n+1}dr}{r^{2n}}$$

$$=C^2n\omega_n\int_\delta^R r^{3-n}dr+2(n-2)Cn\omega_n\int_\delta^R r^{2-n}dr$$

$$+(n-2)^2n\omega_n\int_\delta^\infty r^{1-n}dr$$

$$
= \begin{cases} \dfrac{n}{n-4}\omega_n C^2(\delta^{4-n} - R^{4-n}) + \dfrac{2n(n-2)}{n-3}\omega_n C(\delta^{3-n} - R^{3-n}) \\ +(n-2)n\omega_n\delta^{2-n}, \quad 当 n \geq 5, \\ 4\omega_4 C^2 \ln\dfrac{R}{\delta} + 16\omega_4 C(\delta^{-1} - R^{-1}) + 8\omega_4\delta^{-2}, \quad 当 n = 4. \end{cases}
$$

由此得出 (8.3.11).

这样一来，当 $n \geq 5$ 时，由 (8.3.4), (8.3.9)~(8.3.11) 得出

$$
\begin{aligned}
Q_\lambda(u_\epsilon) &= \frac{\|DU\|_2^2\epsilon^{-\frac{n-2}{2}} - \lambda K_1\epsilon^{-\frac{n-4}{2}} + O(1)}{\|U\|_{2^*}^2\epsilon^{-\frac{n-2}{2}} + O(\epsilon)} \\
&= \frac{\|DU\|_2^2 - \lambda K_1\epsilon + O(\epsilon^{-\frac{n-2}{2}})}{\|U\|_{2^*}^2 + O(\epsilon^{\frac{n}{2}})} \quad (n \geq 5).
\end{aligned}
$$

因此，利用 (8.3.13) 得出

$$
\begin{aligned}
&Q_\lambda(u_\epsilon) - S + \lambda K_1\|U\|_{2^*}^{-2}\epsilon \\
&= \frac{\|DU\|_2^2 - \lambda K_1\epsilon + O(\epsilon^{\frac{n-2}{2}})}{\|U\|_{2^*}^2 + O(\epsilon^{\frac{n}{2}})} - \frac{\|DU\|_2^2 - \lambda K_1\epsilon}{\|U\|_{2^*}^2} \\
&= \frac{\|U\|_2^2 \cdot O(\epsilon^{\frac{n-2}{2}}) - \|DU\|_2^2 O(\epsilon^{\frac{n}{2}}) + \lambda K_1 O(\epsilon^{\frac{n+2}{2}})}{(\|U\|_{2^*}^2 + O(\epsilon^{\frac{n}{2}}))\|U\|_{2^*}^2} \\
&= O(\epsilon^{\frac{n-2}{2}}), \quad 当 n \geq 5.
\end{aligned}
$$

由此知道，当 $n \geq 5$, 即 $\dfrac{n-4}{2} > 0$ 时，存在 ϵ_0 使得

$$
\frac{Q_\lambda(u_\epsilon) - S}{\epsilon} + \lambda K_1\|U\|_{2^*}^{-2} = O(\epsilon^{\frac{n-4}{2}}) < \lambda K_1\|U\|_{2^*}^{-2},
$$

$$
当 0 < \epsilon < \epsilon_0.
$$

这就证明了

$$
Q_\lambda(u_\epsilon) - S < 0, \quad 当 0 < \epsilon < \epsilon_0 \ (n \geq 5). \tag{8.3.19}
$$

当 $n=4$ 时，由 (8.3.4), (8.3.9)~(8.3.11) 得出

$$Q_\lambda(u_\epsilon) = \frac{||DU||_2^2\epsilon^{-1} - 2\omega_4\lambda|\ln\epsilon| + O(1)}{||U||_{2^*}^2\epsilon^{-1} + O(\epsilon)}$$
$$= \frac{||DU||_2^2 - 2\omega_4\lambda\epsilon|\ln\epsilon| + O(\epsilon)}{||U||_{2^*}^2 + O(\epsilon^2)}.$$

利用 (8.3.13), 由上式得出

$$Q_\lambda(u_\epsilon) - S + 2\omega_4\lambda||U||_{2^*}^{-2}\epsilon|\ln\epsilon|$$
$$= \frac{||DU||_2^2 - 2\omega_4\lambda\epsilon|\ln\epsilon| + O(\epsilon)}{||U||_{2^*}^2 + O(\epsilon^2)} - \frac{||DU||_2^2 - 2\omega_4\lambda\epsilon|\ln\epsilon|}{||U||_{2^*}^2}$$
$$= O(\epsilon) \quad (n=4).$$

由此式知道：存在常数 $K_2 > 0$ 及 $0 < \epsilon_1 < 1$ 使得

$$Q_\lambda(u_\epsilon) - S + 2\omega_4\lambda||U||_{2^*}^{-2}\epsilon|\ln\epsilon| \le K_2\epsilon, \quad \text{当 } 0 < \epsilon < \epsilon_1.$$

令 $\epsilon_2 = \exp\left(-\dfrac{K_2||U||_{2^*}^2}{2\omega_4\lambda}\right)$, $\epsilon_3 = \min(\epsilon_1, \epsilon_2)$, 由上式得

$$Q_\lambda(u_\epsilon) - S + 2\omega_4\lambda||U||_{2^*}^{-2}\epsilon|\ln\epsilon|$$
$$\le K_2\epsilon < 2\omega_4||U||_{2^*}^{-2}\epsilon|\ln\epsilon|, \quad \text{当 } 0 < \epsilon < \epsilon_3.$$

由此得出

$$Q_\lambda(u_\epsilon) < S, \quad \text{当 } 0 < \epsilon < \epsilon_3 \ (n=4). \tag{8.3.20}$$

合并 (8.3.19) 及 (8.3.20) 得出：当 $n \ge 4$ 时，对充分小的 ϵ 及由 (8.3.8) 定义的函数 $u_\epsilon(x) \in W_0^{1,2}(\Omega)$ 有

$$Q_\lambda(u_\epsilon) < S.$$

由此，根据定义 (8.3.5) 得出 (8.3.6). 证完.

定理 8.3.2 设 $n \ge 4$. 对任意 $\lambda \in (0, \lambda_1)$, 问题 (8.3.1) 有 (古典) 解.

证 前面已经说明,我们只需证明满足定理 8.2.2 的条件 (8.2.10) 的函数 $v \in W_0^{1,2}(\Omega)$ 存在. 问题 (8.3.1) 对应的泛函 (8.2.9) 为

$$I(u) = \int_\Omega \left\{ \frac{1}{2}|Du|^2 - \frac{\lambda}{2}u^2 - \frac{1}{2^*}|u|^{2^*} \right\} dx.$$

于是, 对任意 $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ 及 $t \geq 0$ 有

$$I(tu) = \frac{A}{2}t^2 - \frac{B}{2^*}t^{2^*},$$

其中

$$A = \|Du\|_2^2 - \lambda\|u\|_2^2 > 0, \quad B = \|u\|_{2^*}^{2^*}.$$

由初等微积分及 (8.3.4) 知道

$$\sup_{t\geq 0} I(tu) = \max_{t\geq 0} I(tu)$$

$$= I(tu)\big|_{t=(\frac{A}{B})^{\frac{n-2}{4}}} = \frac{1}{n}\left[\frac{A}{B^{2/2^*}}\right]^{\frac{n}{2}} = \frac{1}{n}[Q_\lambda(u)]^{\frac{n}{2}}.$$

根据引理 8.3.1, 由上式得出

$$\inf_{0\neq u\in W_0^{1,2}(\Omega)} \sup_{t\geq 0} I(tu) = \frac{1}{n}\left[\inf_{0\neq u\in W_0^{1,2}(\Omega)} Q_\lambda(u)\right]^{\frac{n}{2}} = \frac{1}{n}S_\lambda^{\frac{n}{2}} < \frac{1}{n}S^{\frac{n}{2}}.$$

此式说明: 存在 $0 \neq v \in W_0^{1,2}(\Omega)$ 使得

$$\sup_{t\geq 0} I(tv) < \frac{1}{n}S^{\frac{n}{2}}.$$

因为 $|v| \in W_0^{1,2}(\Omega)$ 且 $I(t|v|) = I(tv)$, 故上式中的 v 可以换成 $|v|$, 即满足定理 8.2.2 的条件的 v 存在. 这就证明了问题 (8.3.1) 有 (古典) 解.

注 引理 8.3.1 对 $n = 3$ 一般是不成立的, 因而对一般的三维区域 Ω 不能得出问题 (8.3.1) 有解的结论. 但是, 当 Ω 是三维球时, 可以证明 $S_\lambda < S, \forall\, \lambda > \frac{1}{4}\lambda_1$. 进而得出问题 (8.3.1) 有解的充要条件是 $\lambda \in \left(\frac{1}{4}\lambda_1, \lambda_1\right)$, 参阅文献 [30].

8.4 方程 $-\Delta u = u^{2^*-1} + f(x,u)$ 零边值问题有正解的条件

本节引理给出保证定理 8.2.2 的条件 (8.2.10) 成立的较易验证的条件. 在以后的三节将结合本节引理应用定理 8.2.2 得出具临界指数半线性椭圆方程零边值问题在不同维数下的一些正解存在定理.

引理 8.4.1 设函数 $f(x,u)$ 满足 (8.2.2) 及条件 $(\mathrm{g}_1) \sim (\mathrm{g}_3)$. 如果存在 Ω 的非空开子集 ω 及函数 $f(u)$ 使得

$$f(x,u) \geq f(u) \geq 0, \quad \forall\, x \in \omega,\ u \geq 0, \tag{8.4.1}$$

且 $F(u) = \int_0^u f(t)dt$ 满足

$$\lim_{\epsilon\to 0} \epsilon \int_0^{\epsilon^{-1/2}} F\left(\left(\frac{\epsilon^{-\frac{1}{2}}}{1+s^2}\right)^{\frac{n-2}{2}}\right) s^{n-1}ds = \infty, \tag{8.4.2}$$

那么满足定理 8.2.2 中条件 (8.2.10) 的函数 v 存在.

证 不妨设 $B_\delta(0) \subset \omega \subset B_R(0)$, $0 < \delta < 1 < R$, 取截割函数 $\eta \in C_0^\infty(\omega)$ 满足

$$\begin{cases} \eta(x) = \begin{cases} 1, & \text{当 } x \in B_\delta(0), \\ 0, & \text{当 } x \in R^n \backslash \omega, \end{cases} \\ 0 \leq \eta(x) \leq 1, \quad \forall\, x \in R^n, \\ |D\eta(x)| \leq C = \text{const}, \quad \forall\, x \in R^n. \end{cases} \tag{8.4.3}$$

命

$$u_\epsilon(x) = \frac{\eta(x)}{(\epsilon + |x|^2)^{\frac{n-2}{2}}}, \tag{8.4.4}$$

$$v_\epsilon(x) = \frac{u_\epsilon(x)}{||u_\epsilon(x)||_2}, \tag{8.4.5}$$

我们来证明：当 ϵ 充分小时， v_ϵ 满足 (8.2.10).

由 (8.3.9) 得出

$$\begin{aligned}
&||u_\epsilon||_{2^*} - ||U||_{2^*}\epsilon^{-\frac{n-2}{4}} \\
= \ & [||U||_{2^*}^2\epsilon^{-\frac{n-2}{2}} + O(\epsilon)]^{\frac{1}{2}} - ||U||_{2^*}\epsilon^{-\frac{n-2}{4}} \\
= \ & \frac{O(\epsilon)}{[||U||_{2^*}^2\epsilon^{-\frac{n-2}{2}} + O(\epsilon)]^{\frac{1}{2}} - ||U||_{2^*}\epsilon^{-\frac{n-2}{4}}} \to 0, \quad \text{当 } \epsilon \to 0,
\end{aligned}$$

因此

$$||u_\epsilon||_{2^*} = ||U||_{2^*}\epsilon^{-\frac{n-2}{4}} + O(1). \tag{8.4.6}$$

由 (8.3.9), (8.3.11) 及 (8.3.13) 得出

$$||Dv_\epsilon||_2^2 = S + O(\epsilon^{\frac{n-2}{2}}). \tag{8.4.7}$$

当 $n = 3$ 时，由 (8.4.4) 有

$$\begin{aligned}
||u_\epsilon||_2^2 &= \int_\Omega |u_\epsilon(x)|^2 dx \le \int_{B_R(0)} \frac{dx}{\epsilon + |x|^2} \\
&= 4\pi\int_0^R \frac{r^2 dr}{\epsilon + r^2} \le 4\pi\int_0^R dr = 4\pi R.
\end{aligned}$$

根据此式及 (8.3.9), (8.3.10), 由 (8.4.5) 得出

$$||v_\epsilon||_2^2 = \begin{cases} O(\epsilon^{\frac{1}{2}}), & \text{当 } n = 3, \\ O(\epsilon|\ln\epsilon|), & \text{当 } n = 4, \\ O(\epsilon), & \text{当 } n \ge 5. \end{cases} \tag{8.4.8}$$

令 $X_\epsilon = ||Dv_\epsilon||_2^2$, 由 (8.2.9) 得

$$\begin{aligned}
I(tv_\epsilon) &= \frac{t^2}{2}X_\epsilon - \frac{t^{2^*}}{2^*} - \int_\Omega F(x, tv_\epsilon)dx \\
&\le \frac{t^2}{2}X_\epsilon - \frac{t^{2^*}}{2^*} \to -\infty, \quad \text{当 } t \to +\infty.
\end{aligned} \tag{8.4.9}$$

因此，$I(tv_\epsilon)$ 在某个 $t_\epsilon(\geq 0)$ 处达到其上界 $\sup_{t\geq 0} I(tv_\epsilon)$. 命

$$Y_\epsilon = \sup_{t\geq 0} I(tv_\epsilon) = \sup_{t\geq 0} I(t_\epsilon v_\epsilon). \tag{8.4.10}$$

如果 $t_\epsilon = 0$, 则由 (8.4.10) 及 (8.4.9) 有

$$\sup_{t\geq 0} I(tv_\epsilon) = I(t_\epsilon v_\epsilon) = I(0) = 0 < \frac{1}{n} S^{\frac{n}{2}},$$

即 (8.2.10) 成立. 以下设 $t_\epsilon > 0$. 因 $I(tv_\epsilon)$ 当 $t = t_\epsilon$ 时取极大值，故有

$$\frac{d}{dt} I(tv_\epsilon)|_{t=t_\epsilon} = 0.$$

因此，由 (8.4.9) 得

$$t_\epsilon X_\epsilon - t_\epsilon^{2^*-1} - \int_\Omega f(x, t_\epsilon v_\epsilon) v_\epsilon dx = 0. \tag{8.4.11}$$

由此式及条件 (8.4.1) 得出 $X_\epsilon \geq t_\epsilon^{2^*-2}$, 即

$$t_\epsilon \leq X_\epsilon^{\frac{n-2}{4}}. \tag{8.4.12}$$

由 (8.4.7), 当 ϵ 充分小时有

$$X_\epsilon = \|Dv_\epsilon\|_2^2 \leq 2S. \tag{8.4.13}$$

由 (8.2.27), 对任意 $\mu > 0$ 有

$$|f(x, u)| \leq \mu u^{2^*-1} + C(\mu) u, \quad \forall\ (x, u) \in \bar{\Omega} \times [0, \infty).$$

由此式及 (8.4.5), (8.4.12), (8.4.13) 得出

$$\left| \frac{1}{t_\epsilon} \int_\Omega f(x, t_\epsilon v_\epsilon) v_\epsilon dx \right| \leq \int_\Omega [\mu t_\epsilon^{2^*-2} v_\epsilon^{2^*} + C(\mu) v_\epsilon^2] dx$$

$$\leq \mu t_\epsilon^{\frac{4}{n-2}} + C(\mu) \|v_\epsilon\|_2^2 \leq 2\mu S + C(\mu) \|v_\epsilon\|_2^2.$$

利用 (8.4.8), 由上式得出

$$\overline{\lim_{\epsilon\to 0}} \left| \frac{1}{t_\epsilon} \int_\Omega f(x, t_\epsilon v_\epsilon) v_\epsilon dx \right| \leq 2\mu S.$$

因为 μ 是任意正数，由上式得出

$$\overline{\lim_{\epsilon\to 0}}\left|\frac{1}{t_\epsilon}\int_\Omega f(x,t_\epsilon v_\epsilon)v_\epsilon dx\right| = 0.$$

由此知

$$\lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{t_\epsilon}\int_\Omega f(x,t_\epsilon v_\epsilon)v_\epsilon dx = 0.$$

根据此式及 (8.4.7), 由 (8.4.11) 得出

$$t_\epsilon^{2^*-2} = X_\epsilon - \frac{1}{t_\epsilon}\int_\Omega f(x,t_\epsilon v_\epsilon)v_\epsilon \to S, \quad \text{当 } \epsilon\to 0,$$

即

$$t_\epsilon \to S^{\frac{n-2}{4}}, \quad \text{当 } \epsilon \to 0. \tag{8.4.14}$$

因为函数 $t\to \frac{t^2}{2}X_\epsilon - \frac{t^{2^*}}{2^*}$ 在区间 $\left[0, X_\epsilon^{\frac{n-2}{4}}\right]$ 上是单调增加的，由 (8.4.10), (8.4.12) 及 (8.4.7) 得出

$$\begin{aligned}
Y_\epsilon &= \frac{t_\epsilon^2}{2}X_\epsilon - \frac{t_\epsilon^{2^*}}{2^*} - \int_\Omega F(x,t_\epsilon v_\epsilon)dx \\
&\le \frac{1}{n}X_\epsilon^{\frac{n}{2}} - \int_\Omega F(x,t_\epsilon v_\epsilon)dx \qquad (8.4.15)\\
&= \frac{1}{n}S^{\frac{n}{2}} + O(\epsilon^{\frac{n-2}{2}}) - \int_\Omega F(x,t_\epsilon v_\epsilon)dx.
\end{aligned}$$

由 (8.4.6) 及 (8.4.14), 对充分小的 ϵ 有

$$||U_\epsilon||_{2^*} \le 2||U||_{2^*}\cdot \epsilon^{-\frac{n-2}{4}}, \quad t_\epsilon > \frac{1}{2}S^{\frac{n-2}{4}}.$$

由 (8.4.3) 及 (8.4.4) 有

$$u_\epsilon(x) = \frac{1}{(\epsilon+|x|^2)^{\frac{n-2}{2}}}, \quad \forall\, x\in B_\delta(0).$$

利用上面这三个式子，由 (8.4.5) 得出

$$t_\epsilon v_\epsilon \ge \frac{A\epsilon^{\frac{n-2}{4}}}{(\epsilon+|x|^2)^{\frac{n-2}{2}}}, \quad \forall\, x\in B_\delta(0),\ A = \frac{S^{\frac{n-2}{4}}}{4||U||_{2^*}}.$$

因此，由 (8.4.1), $B_\delta(0)\subset\omega\subset\Omega$ 及 $F(u)$ 的单调性得

$$\int_\Omega F(x,t_\epsilon v_\epsilon)dx \ge \int_{B_\delta(0)} F(t_\epsilon v_\epsilon)dx \ge \int_{B_\delta(0)} F\left(\frac{A\epsilon^{\frac{n-2}{4}}}{(\epsilon+|x|^2)^{\frac{n-2}{2}}}\right)dx. \tag{8.4.16}$$

由 (8.4.15) 及 (8.4.16) 有

$$Y_\epsilon \le \frac{1}{n}S^{\frac{n}{2}} + O(\epsilon^{\frac{n-2}{2}}) - \int_{B_\delta(0)} F\left(\frac{A\epsilon^{\frac{n-2}{4}}}{(\epsilon+|x|^2)^{\frac{n-2}{2}}}\right)dx. \tag{8.4.17}$$

今证

$$H_\epsilon = \epsilon^{-\frac{n-2}{2}}\int_{B_\delta(0)} F\left(\frac{A\epsilon^{\frac{n-2}{4}}}{(\epsilon+|x|^2)^{\frac{n-2}{2}}}\right)dx \to \infty, \text{当 } \epsilon\to 0. \tag{8.4.18}$$

先后作代换 $r=\epsilon^{\frac{1}{2}}s$ 及 $\epsilon = A^{\frac{4}{n-2}}\bar\epsilon$ 得出

$$\begin{aligned} H_\epsilon &= \epsilon^{-\frac{n-2}{2}} n\omega_n \int_0^\delta F\left(\frac{A\epsilon^{\frac{n-2}{4}}}{(\epsilon+r^2)^{\frac{n-2}{2}}}\right) r^{n-1}dr \\ &= n\omega_n \epsilon \int_0^{\delta\epsilon^{-\frac{1}{2}}} F\left(\frac{A\epsilon^{-\frac{n-2}{4}}}{(\epsilon+s^2)^{\frac{n-2}{2}}}\right) s^{n-1}ds \\ &= n\omega_n A^{\frac{4}{n-2}}\bar\epsilon \int_0^{\beta\bar\epsilon^{-\frac{1}{2}}} F\left(\left(\frac{\bar\epsilon^{-\frac{1}{2}}}{1+s^2}\right)^{\frac{n-2}{2}}\right) s^{n-1}ds, \end{aligned} \tag{8.4.19}$$

其中 $\beta=\delta A^{-\frac{2}{n-2}}$. 当 $\beta\ge 1$ 时，根据 (8.4.2), 由上式得出

$$H_\epsilon \ge n\omega_n A^{\frac{4}{n-2}}\bar\epsilon \int_0^{\bar\epsilon^{-\frac{1}{2}}} F\left(\left(\frac{\bar\epsilon^{-\frac{1}{2}}}{1+s^2}\right)^{\frac{n-2}{2}}\right) s^{n-1}ds \to \infty,$$

当 $\epsilon\to 0$ (即 $\bar\epsilon\to 0$),

即 (8.4.18) 成立. 当 $\beta<1$ 时，由 (8.4.19) 有

$$H_\epsilon = n\omega_n A^{\frac{4}{n-2}}\bar\epsilon \int_0^{\bar\epsilon^{-\frac{1}{2}}} F\left(\left(\frac{\bar\epsilon^{-\frac{1}{2}}}{1+s^2}\right)^{\frac{n-2}{2}}\right) s^{n-1}ds - n\omega_n A^{\frac{4}{n-2}} Z_{\bar\epsilon}, \tag{8.4.20}$$

其中

$$Z_{\bar{\epsilon}}=\bar{\epsilon}\int_{\beta\bar{\epsilon}^{-\frac{1}{2}}}^{\bar{\epsilon}^{-\frac{1}{2}}}F\left(\left(\frac{\bar{\epsilon}^{-\frac{1}{2}}}{1+s^2}\right)^{\frac{n-2}{2}}\right)s^{n-1}ds.$$

由 (8.2.29) 有： $F(x,u)=\int_0^u f(x,t)dt$ 满足

$$|F(x,u)|\le u^{2^*}+Cu^2,\quad \forall(x,u)\in\bar{\Omega}\times[0,\infty).$$

因此，由 (8.4.1)(注意 $F(u)$ 的单调性) 得出

$$|Z_\epsilon|\le\epsilon\int_{\beta\epsilon^{-\frac{1}{2}}}^{\epsilon^{-\frac{1}{2}}}F\left(\frac{\epsilon^{-\frac{n-2}{4}}}{s^{n-2}}\right)s^{n-1}dr$$

$$\le\epsilon\int_{\beta\epsilon^{-\frac{1}{2}}}^{\epsilon^{-\frac{1}{2}}}F\left(\left(\frac{\epsilon^{-\frac{n-2}{4}}}{(\beta\epsilon^{-\frac{1}{2}})^{n-2}}\right)\right)s^{n-1}ds$$

$$=\epsilon F(\beta^{2-n}\epsilon^{\frac{n-2}{4}})\int_{\beta\epsilon^{-\frac{1}{2}}}^{\epsilon^{-\frac{1}{2}}}s^{n-1}ds$$

$$\le\epsilon\{(\beta^{2-n}\epsilon^{\frac{n-2}{4}})^{2^*}+C(\beta^{2-n}\epsilon^{\frac{n-2}{4}})^2\}\frac{1}{n}\{\epsilon^{-\frac{n}{2}}-\beta^n\epsilon^{-\frac{n}{2}}\}$$

$$=\frac{1-\beta^n}{n\beta^{2n}}(\epsilon+C\beta^4).$$

由此式及 (8.4.20) 和 (8.4.2) 仍可得出 (8.4.18).

由 (8.4.17) 及 (8.4.18) 得出

$$\left(Y_\epsilon-\frac{1}{n}S^{\frac{n}{2}}\right)\epsilon^{-\frac{n-2}{2}}\le O(1)-H_\epsilon\to-\infty,\quad \text{当 }\epsilon\to 0.$$

因此得出：当正数 ϵ 充分小时有

$$\sup_{t\ge0}I(tv_\epsilon)=Y_\epsilon<\frac{1}{n}S^{\frac{n}{2}},$$

即满足定理 8.2.2 中条件 (8.2.10) 的函数 $v=v_\epsilon$ 存在.

8.5 $n(\geq 5)$ 维情形

定理 8.5.1 设 $n\geq 5$, 函数 $f(x,u)$ 满足 (8.2.2), (8.2.3) 及条件 $(g_1)\sim(g_3)$. 如果存在 Ω 的非空开子集 ω, $(0,+\infty)$ 的非空开区间 I 及常数 $\mu>0$, 使得

$$f(x,u)\geq 0,\quad \forall (x,u)\in\omega\times[0,\infty), \tag{8.5.1}$$

$$f(x,u)\geq\mu>0,\quad \forall (x,u)\in\omega\times I, \tag{8.5.2}$$

那么问题 (8.2.1) 有 (古典) 解.

证 设 $c\in I=(a,b)\subset(0,+\infty)$, 由 (8.5.1) 及 (8.5.2) 有

$$f(x,u)\geq f(u)=\begin{cases}\mu, & \text{当 } (x,u)\in\omega\times I,\\ 0, & \text{当 } (x,u)\in\omega\times((0,\infty)\backslash I),\end{cases}$$

$$F(u)=\int_0^u f(t)dt\geq\int_0^c f(t)dt=\mu(c-a)=B>0,\ \text{当 } u\geq c.$$

因此

$$F\left(\left(\frac{\epsilon^{-\frac{1}{2}}}{1+s^2}\right)^{\frac{n-2}{2}}\right)\geq B,\quad \text{当 } \frac{\epsilon^{-\frac{1}{2}}}{1+s^2}\geq c^{\frac{2}{n-2}}. \tag{8.5.3}$$

于是，当

$$\epsilon\leq\min\left(\frac{9}{16}c^{-\frac{4}{n-2}},16C^{\frac{4}{n-2}}\right) \tag{8.5.4}$$

时有

$$\epsilon^{\frac{1}{2}}\leq\frac{3}{4}c^{-\frac{2}{n-2}},\quad \epsilon^{\frac{1}{4}}\leq 2c^{\frac{1}{n-2}},$$

从而有

$$1\leq\frac{3}{4}c^{-\frac{2}{n-2}}\epsilon^{-\frac{1}{2}},\quad \frac{1}{2}c^{-\frac{1}{n-2}}\epsilon^{-\frac{1}{4}}\leq\epsilon^{-\frac{1}{2}}. \tag{8.5.5}$$

因而又有

$$\epsilon\int_0^{\epsilon^{-\frac{1}{2}}} F\left(\left(\frac{\epsilon^{-\frac{1}{2}}}{1+s^2}\right)^{\frac{n-2}{2}}\right)s^{n-1}ds$$

$$\geq \epsilon\int_0^{\frac{1}{2}c^{-\frac{1}{n-2}}\epsilon^{-\frac{1}{4}}} F\left(\left(\frac{\epsilon^{-\frac{1}{2}}}{1+s^2}\right)^{\frac{n-2}{2}}\right)s^{n-1}ds. \tag{8.5.6}$$

此时右端的积分变量 $s \leq \frac{1}{2}c^{-\frac{1}{n-2}}c^{-\frac{1}{4}}$, 由 (8.5.5) 有

$$1+s^2 \leq c^{-\frac{2}{n-2}}\epsilon^{-\frac{1}{2}}, \quad 即\ \frac{\epsilon^{-\frac{1}{2}}}{1+s^2} \geq c^{\frac{2}{n-2}}.$$

因此，由 (8.5.6) 及 (8.5.3) 得出：当 (8.5.4) 成立时有

$$\epsilon\int_0^{\epsilon^{-\frac{1}{2}}} F\left(\left(\frac{\epsilon^{-\frac{1}{2}}}{1+s^2}\right)^{\frac{n-2}{2}}\right)s^{n-1}ds \geq \epsilon\int_0^{\frac{1}{2}c^{-\frac{1}{n-2}}\epsilon^{-\frac{1}{4}}} Bs^{n-1}ds$$

$$= 2^{-n}n^{-1}Bc^{-\frac{n}{n-2}}\epsilon^{1-\frac{n}{4}} \to \infty, \quad 当\ \epsilon \to 0 (n \geq 5).$$

即引理 8.4.1 中的条件是满足的，因而定理 8.2.2 的条件也是满足的，从而问题 (8.2.1) 有 (古典) 解.

例 1 当 $n \geq 5$ 时, 根据定理 8.5.1, 对任意 $\mu > 0$, 问题 (8.2.59) 有古典解 $u \in C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$.

例 2 如果 $f(x,u) = f(u) \in C^1([0,\infty))$ 满足

$$f(0) = 0,\ f'(0) < \lambda_1,\ f(u) \geq 0, \quad \forall\, u \geq 0,$$

$$\lim_{u\to+\infty}\frac{f(u)}{u^{2^*-1}} = 0$$

(例如 $f(u) = \lambda u + \mu u^q$, $\lambda \in (0,\lambda_1)$, $\mu > 0$, $1 < q < 2^* - 1$), 则定理 8.5.1 的所有条件都成立. 从而问题 (8.2.1) 有 (古典) 解.

8.6 四维情形

定理 8.6.1 设 $n = 4$, $f(x,u)$ 满足 (8.2.2), (8.2.3) 及条件 $(\mathrm{g}_1) \sim (\mathrm{g}_3)$. 如果存在 Ω 的非空开子集 ω 及正常数 μ, A, 使得

$$f(x,u) \geq 0, \quad \forall\ (x,u) \in \omega \times [0,\infty) \tag{8.6.1}$$

及下列两个条件之一成立:

$$f(x,u) \geq \mu u, \quad \forall\ (x,u) \in \omega \times [0,A], \tag{8.6.2}$$

$$f(x,u) \geq \mu u, \quad \forall\ (x,u) \in \omega \times [A,\infty), \tag{8.6.2$'$}$$

那么问题 (8.2.1) 有 (古典) 解.

证 对下面两种情形分别证明条件 (8.4.2) 成立.

(i) 当 (8.6.2) 成立时, 我们有

$$f(x,u) \geq f(u) = \begin{cases} \mu u, & 当\ (x,u) \in \omega \times [0,A], \\ 0, & 当\ (x,u) \in \omega \times [A,\infty), \end{cases}$$

$$F(u) = \int_0^u f(t)dt = \int_0^u \mu t dt = \frac{1}{2}\mu u^2, \quad 当\ u \in [0,A]. \tag{8.6.3}$$

当 $0 \leq \epsilon \leq A^2$ 时有

$$0 < A^{-\frac{1}{2}}\epsilon^{-\frac{1}{4}} \leq \epsilon^{-\frac{1}{2}}.$$

从而有

$$\epsilon\int_0^{\epsilon^{-\frac{1}{2}}} F\left(\frac{\epsilon^{-\frac{1}{2}}}{1+s^2}\right) s^3 ds \geq \epsilon\int_{A^{-\frac{1}{2}}\epsilon^{-\frac{1}{4}}}^{\epsilon^{-\frac{1}{2}}} F\left(\frac{\epsilon^{-\frac{1}{2}}}{1+s^2}\right) s^3 ds. \tag{8.6.4}$$

此时右端的积分变量 s 满足

$$s \geq A^{-\frac{1}{2}}\epsilon^{-\frac{1}{4}},$$

从而有

$$\frac{\epsilon^{-\frac{1}{2}}}{1+s^2} \le \epsilon^{-\frac{1}{2}} s^{-2} \le A.$$

因此，由 (8.6.4) 及 (8.6.3) 得出

$$\epsilon \int_0^{\epsilon^{-\frac{1}{2}}} F\left(\frac{\epsilon^{-\frac{1}{2}}}{1+s^2}\right) s^3 ds \ge \epsilon \int_{A^{-\frac{1}{2}}\epsilon^{-\frac{1}{4}}}^{\epsilon^{-\frac{1}{2}}} \frac{1}{2}\mu \left(\frac{\epsilon^{-\frac{1}{2}}}{1+s^2}\right)^2 s^3 ds$$

$$= \frac{\mu}{2} \int_{A^{-\frac{1}{2}}\epsilon^{-\frac{1}{4}}}^{\epsilon^{-\frac{1}{2}}} \frac{s^3}{(1+s^2)^2} ds$$

$$= \frac{\mu}{4} \left[\ln(1+s^2) + \frac{1}{1+s^2}\right]_{A^{-\frac{1}{2}}\epsilon^{-\frac{1}{4}}}^{\epsilon^{-\frac{1}{2}}}$$

$$= \frac{\mu}{4} \left[\ln \frac{1+\epsilon^{-1}}{1+A^{-1}\epsilon^{-\frac{1}{2}}} + \frac{1}{1+\epsilon^{-1}} - \frac{1}{1+A^{-1}\epsilon^{-\frac{1}{2}}}\right]$$

$$= \frac{\mu}{4} \left[\ln \frac{\epsilon^{\frac{1}{2}}+\epsilon^{-\frac{1}{2}}}{\epsilon^{\frac{1}{2}}+A^{-1}} + \frac{\epsilon}{1+\epsilon} - \frac{\epsilon^{\frac{1}{2}}}{\epsilon^{\frac{1}{2}}+A^{-1}}\right]$$

$\to \infty$, 当 $\epsilon \to 0$.

(ii) 当 $(8.6.2)^1$ 成立时，我们有

$$f(x,u) \ge f(u) = \begin{cases} 0, & 当\ (x,u) \in \omega \times [0,A], \\ \mu u, & 当\ (x,u) \in \omega \times [A,\infty), \end{cases}$$

$$F(u) = \int_0^u f(t)dt = \int_A^u f(t)dt = \int_A^u \mu t dt = \frac{1}{2}\mu(u^2 - A^2), \quad 当\ u \ge A. \tag{8.6.5}$$

如果

$$0 < \epsilon \le \min\left(4A^2, \frac{1}{4A^2}\right), \tag{8.6.6}$$

则有

$$\epsilon^{\frac{1}{4}} \le (2A)^{\frac{1}{2}}, \quad \epsilon^{\frac{1}{2}} \le \frac{1}{2A},$$

从而

$$(2A)^{-\frac{1}{2}}\epsilon^{-\frac{1}{4}} \le \epsilon^{-\frac{1}{2}}, \quad 1 \le \frac{1}{2A}\epsilon^{-\frac{1}{2}}, \tag{8.6.7}$$

因此

$$\epsilon\int_0^{\epsilon^{-\frac{1}{2}}} F\left(\frac{\epsilon^{-\frac{1}{2}}}{1+s^2}\right)s^3ds \ge \epsilon\int_0^{(2A)^{-\frac{1}{2}}\epsilon^{-\frac{1}{4}}} F\left(\frac{\epsilon^{-\frac{1}{2}}}{1+s^2}\right)s^3ds. \tag{8.6.8}$$

此式右端积分变量 s 满足

$$0 \le s \le (2A)^{-\frac{1}{2}}\epsilon^{-\frac{1}{4}}.$$

由 (8.6.7) 及上式得出

$$1+s^2 \le \frac{1}{A}\epsilon^{-\frac{1}{2}}, \quad \text{即} \quad \frac{\epsilon^{-\frac{1}{2}}}{1+s^2} \ge A.$$

因此，由 (8.6.8) 及 (8.6.5) 得出

$$\begin{aligned}
&\epsilon\int_0^{\epsilon^{-\frac{1}{2}}} F\left(\frac{\epsilon^{-\frac{1}{2}}}{1+s^2}\right)s^3ds \\
&\ge \epsilon\int_0^{(2A)^{-\frac{1}{2}}\epsilon^{-\frac{1}{4}}} \frac{1}{2}\mu\left(\frac{\epsilon^{-1}}{(1+s^2)^2}-A^2\right)s^3ds \\
&= \frac{\mu}{4}\left[\ln(1+s^2)+\frac{1}{1+s^2}\right]_0^{(2A)^{-\frac{1}{2}}\epsilon^{-\frac{1}{4}}} - \frac{\mu}{8}\epsilon A^2[(2A)^{-\frac{1}{2}}\epsilon^{-\frac{1}{4}}]^4 \\
&= \frac{\mu}{4}\left[\ln(1+\frac{1}{2A}\epsilon^{-\frac{1}{2}})+\frac{1}{1+(2A)^{-1}\epsilon^{-\frac{1}{2}}}-1\right]-\frac{1}{32}\mu \\
&\to \infty, \quad \text{当 } \epsilon \to 0.
\end{aligned}$$

这就证明了引理 8.4.1 中的条件都是满足的. 因而由定理 8.2.2 知道，问题 (8.2.1) 有 (古典) 解.

例 1 当 $n=4$ 时，根据定理 8.6.1，对任意 $\mu>0$，问题 (8.2.59) 有古典解 $u \in C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$.

例 2 设 $n=4$, $f(x,u)=f(u)\in C^1([0,\infty))$ 满足

$$f(0)=0,\ 0<f'(0)<\lambda_1,\ f(u)\geq 0,\ \forall u\geq 0,$$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{f(u)}{u^3}=0$$

(例如, $f(u)=\lambda u+\mu u^q$, $\lambda\in(0,\lambda_1)$, $\mu>0$, $1<q<3$), 则定理 8.6.1 的所有条件都满足, 从而问题 (8.2.1) 有 (古典) 解.

8.7 三 维 情 形

定理 8.7.1 设 $n=3$, $f(x,u)$ 满足 (8.2.2), (8.2.3) 及 $(g_1)\sim(g_3)$, 且存在 Ω 的非空开子集 ω, 使得

$$f(x,u)\geq 0,\quad \forall (x,u)\in\omega\times[0,\infty), \tag{8.7.1}$$

$$\lim_{u\to+\infty}\frac{f(x,u)}{u^3}=+\infty\ (\text{对 } x\in\omega \text{ 一致}), \tag{8.7.2}$$

那么问题 (8.2.1) 有 (古典) 解.

证 记 $f(u)=\inf_{x\in\omega}f(x,u)$, 则

$$f(x,u)\geq f(u)\geq 0,\quad \forall (x,u)\in\omega\times[0,\infty),$$

$$\lim_{u\to+\infty}\frac{f(u)}{u^3}=+\infty.$$

由此知道: 对任意 $\mu>0$, 存在 $A=A(\mu)>0$ 使得

$$\frac{f(u)}{u^3}\geq 4\mu,\quad 当\ \ u\geq A.$$

从而有

$$F(u)\geq\mu u^4,\quad 当\ \ u\geq A. \tag{8.7.3}$$

当

$$\epsilon\leq\min\left(16A^4,\frac{9}{16A^4}\right) \tag{8.7.4}$$

时有

$$(2A)^{-1}\epsilon^{-\frac{1}{4}} \le \epsilon^{-\frac{1}{2}}, \quad 1 \le \frac{3}{4}A^{-2}\epsilon^{-\frac{1}{2}}, \tag{8.7.5}$$

从而有

$$\begin{aligned}&\epsilon\int_0^{\epsilon^{-\frac{1}{2}}} F\left(\left(\frac{\epsilon^{-\frac{1}{2}}}{1+s^2}\right)^{\frac{1}{2}}\right)s^2ds\\ \ge\ &\epsilon\int_0^{(2A)^{-1}\epsilon^{-\frac{1}{4}}} F\left(\left(\frac{\epsilon^{-\frac{1}{2}}}{1+s^2}\right)^{\frac{1}{2}}\right)s^2ds.\end{aligned} \tag{8.7.6}$$

此式右端的积分变量 $s \le (2A)^{-1}\epsilon^{-\frac{1}{4}}$, 由 (8.7.5) 有

$$1+s^2 \le A^{-2}\epsilon^{-\frac{1}{2}}, \quad 即 \quad \left(\frac{\epsilon^{-\frac{1}{2}}}{1+s^2}\right)^{\frac{1}{2}} \ge A.$$

因此，由 (8.7.6) 及 (8.7.3) 得出

$$\epsilon\int_0^{\epsilon^{-\frac{1}{2}}} F\left(\left(\frac{\epsilon^{-\frac{1}{2}}}{1+s^2}\right)^{\frac{1}{2}}\right)s^2ds \ge \mu\int_0^{(2A)^{-1}\epsilon^{-\frac{1}{4}}} \frac{s^2}{(1+s^2)^2}s^2ds$$

$$= \frac{\mu}{2}\left[\text{arctg}s - \frac{s}{1+s^2}\right]_0^{(2A)^{-1}\epsilon^{-\frac{1}{4}}}$$

$$= \frac{\mu}{2}\left[\text{arctg}\left(\frac{1}{2}(2A)^{-1}\epsilon^{-\frac{1}{4}}\right) - \frac{(2A)^{-1}\epsilon^{-\frac{1}{4}}}{1+(2A)^{-2}\epsilon^{-\frac{1}{2}}}\right]$$

$$\to \frac{\mu\pi}{4}, \quad 当\ \epsilon \to 0.$$

因为 μ 是任意正数，由上式知条件 (8.4.2) 满足．由定理 8.2.2 及引理 8.4.1 知道问题 (8.2.1) 有古典解.

例 1 当 $n=3$ 且 $3<q<2^*-1=5$ 时，根据定理 8.7.1, 对任意 $\mu>0$, 问题 (8.2.59) 有古典解 $u \in C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$.

例 2 设 $n=3$, $f(x,u)=f(u)\in C^1([0,\infty))$ 满足

$$f(0)=0,\quad 0<f'(0)<\lambda_1,\quad f(u)\geq 0,\quad \forall u\geq 0,$$

$$\lim_{u\to+\infty}\frac{f(u)}{u^3}=+\infty$$

(例如 $f(u)=\lambda u+\mu u^q$, $\lambda\in(0,\lambda_1)$,$\mu>0$, $3<q<5$), 则定理 8.6.1 的所有条件都满足. 从而问题 (8.2.1) 有古典解.

第九章　集中紧性原理与具临界指数的拟线性椭圆方程

设 $1 < p < n$, Ω 是 R^n 中的有界光滑区域， $p^* = \dfrac{np}{n-p}$ 是 Sobolev 嵌入 $W_0^{1,p}(\Omega) \subsetneqq L^{p^*}(\Omega)$ 的临界 (最大) 指数．本章研究具临界指数的拟线性椭圆方程 Dirichlet 问题

$$\begin{cases} -\mathrm{div}(|Du|^{p-2}Du) = |u|^{p^*-2}u + f(x,u), & \text{在 } \Omega \text{ 中}, \\ u = 0, & \text{在 } \partial\Omega \text{ 上}, \end{cases} \tag{9.0.1}$$

在 $W_0^{1,p}(\Omega)$ 中的弱解存在问题，其中 $f(x,0)=0$, 且

$$\lim_{u\to\infty} \frac{f(x,u)}{|u|^{p^*-2}u} = 0$$

关于 $x \in \Omega$ 是一致的.

第八章讨论了具临界指数的半线性椭圆方程，即 (9.0.1) 当 $p = 2$ 的情形．要研究一般的具临界指数的拟线性方程 (9.0.1), 第八章的方法已不够用，需要引进 Lions P. L. 的集中紧性原理作为工具.

讲述集中紧性原理需要用到一般测度与积分的知识．在本书附录 1 中将给出一般测度与积分的一个简单介绍，其中多数定理的证明均略去了．关于这方面的更完全系统的知识可参阅任何一本关于测度与积分论的著作，例如文献 [10] 与文献 [13].

本章 9.1 节给出集中紧性原理的几个引理， 9.2 节讲述集中紧性原理， 9.3 节应用集中紧性原理研究形如 (9.0.1) 的拟线性椭圆方程的 Dirichlet 问题.

9.1　几 个 引 理

引理 9.1.1　设 $1 \le p < \infty$, 序列 $\{u_k\} \subset L^p(\Omega)$, $u \in L^p(\Omega)$. 如果 u_k 在 $L^p(\Omega)$ 中弱收敛于 u, 则对任意非负函数 $\phi \in L^\infty(\Omega)$ 有

$$\int_\Omega \phi|u|^p dx \leq \underline{\lim}_{k\to\infty} \int_\Omega \phi|u_k|^p dx. \tag{9.1.1}$$

特别地有

$$||u||_p \leq \underline{\lim}_{k\to\infty}||u_k||_p. \tag{9.1.1$'$}$$

证 因为 $L^p(\Omega)$ 的对偶空间 $(L^p(\Omega))^*$ 的元素 f 均可表示成(参阅文献 [9] 定理 2.33)

$$f(u) = \int_\Omega uvdx,\ v \in L^{p'}(\Omega).$$

如果 u_k 在 $L^p(\Omega)$ 中弱收敛于 u, 即

$$\int_\Omega u_k\psi dx \to \int_\Omega u\psi dx, \quad \forall\ \psi \in L^{p'}(\Omega),\ p' = \frac{p}{p-1}.$$

对任意非负函数 $\phi \in L^\infty(\Omega)$, 在上式中取 $\psi = \phi|u|^{p-2}u \in L^{p'}(\Omega)$ 得出

$$\int_\Omega u_k|u|^{p-2}u\phi dx \to \int_\Omega |u|^p\phi dx. \tag{9.1.2}$$

由 Holder 不等式有

$$\int_\Omega u_k|u|^{p-2}u\phi dx \leq \left(\int_\Omega |u_k|^p\phi dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_\Omega |u|^p\phi dx\right)^{\frac{1}{p'}}.$$

对此式两端取下极限, 利用 (9.1.2) 得出

$$\int_\Omega |u|^p\phi dx \leq \underline{\lim}_{k\to\infty} \left(\int_\Omega |u_k|^p\phi dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_\Omega |u|^p\phi dx\right)^{\frac{1}{p'}}.$$

由此式得出 (9.1.1). 在 (9.1.1) 中取 $\phi \equiv 1$ 推出 (9.1.1)$'$. 证完.

线性空间 $\mathcal{D}(R^n) = C_0^\infty(R^n)$ 是一个不可赋范的空间, 但可以在其中引进收敛的概念.

定义 1 设序列 $\{\phi_k\} \subset \mathcal{D}(R^n)$, $\phi \in \mathcal{D}(R^n)$, 如果存在紧集 $K \subset R^n$ 使得

(i) $\text{supp}(\phi_k - \phi) \subset K,\ k = 1, 2, \cdots;$

(ii) $\phi_k(x)$ 及其各阶导数在 K 上分别一致收敛于 $\phi(x)$ 及其各阶导数.

则称 $\{\phi_k\}$ 在 $\mathcal{D}(R^n)$ 中收敛于 ϕ, 记为 $\phi_k \to \phi$ 在 $\mathcal{D}(R^n)$ 中.

定义 2 设 T 是 $\mathcal{D}(R^n)$ 上的泛函. 如果

$$\phi_k \to \phi, \quad \text{在 } \mathcal{D}(R^n) \text{ 中},$$

则必有

$$T(\phi_k) \to T(\phi),$$

那么, 称泛函 T 在 $\mathcal{D}(R^n)$ 上是连续的. $\mathcal{D}(R^n)$ 上的线性连续泛函称为 R^n 上的 **广义函数** 或 **分布**. R^n 上所有广义函数的集合即 $\mathcal{D}(R^n)$ 的对偶空间, 称为 R^n 上的 **广义函数空间**, 记为 $\mathcal{D}'(R^n)$.

对 $u \in L^1_{\text{loc}}(R^n)$, 等式

$$T_u(\phi) = \int_{R^n} u(x)\phi(x)dx, \quad \forall\ \phi \in \mathcal{D}(R^n) \tag{9.1.3}$$

定义一个 $\mathcal{D}(R^n)$ 上的线性泛函 T_u. 假定 $\phi_k \to \phi$ 在 $\mathcal{D}(R^n)$ 中, 由定义 1, 存在紧集 $K \subset R^n$ 使得

$$\text{supp}(\phi_k - \phi) \subset K \quad (k = 1, 2, \cdots),$$

$$\sup_{x\in K} |\phi_k(x) - \phi(x)| \to 0, \quad \text{当 } k \to \infty.$$

于是, 根据 (9.1.3) 得出

$$|T_u(\phi_k) - T_u(\phi)| \le \sup_{x\in K} |\phi_k(x) - \phi(x)| \int_K |u(x)|dx \to 0,$$

$$\text{当 } k \to \infty.$$

因此, T_u 是连续的. 于是 T_u 是 R^n 上的一个广义函数. 由 5.3 节广义变分法基本引理知道, 在 $L^1_{\text{loc}}(R^n)$ 中不同的函数 u 与 v 对应于 $\mathcal{D}'(R^n)$ 中不同的广义函数 T_u 与 T_v, 即 $L^1_{\text{loc}}(R^n)$ 与 $\mathcal{D}'(R^n)$ 的子空间 $V = \{T_u | u \in L^1_{\text{loc}}(R^n)\}$ 通过等式 (9.1.3) 建立了一一对应关系

$u \to T_u$. V 是 $\mathcal{D}'(R^n)$ 的真子空间，即存在广义函数 $T \in \mathcal{D}'(R^n)$，但不存在 $u \in L^1_{\text{loc}}(R^n)$ 使 T 可以表示成 (9.1.3) 的形状. 例如，由等式

$$\delta_{x_0}(\phi) = \phi(x_0), \quad \forall\, \phi \in \mathcal{D}(R^n) \tag{9.1.4}$$

定义了 $\mathcal{D}'(R^n)$ 上的线性连续泛函 δ_{x_0}，即 $\delta_{x_0} \in \mathcal{D}'(R^n)$. 这个广义函数 δ_{x_0} 通常叫做 **Dirac δ函数** 或简称为 **δ函数**. 在应用中，常常把 δ 函数 δ_{x_0} 形式上也表成 (9.1.3) 的形状，且把对应的 u 仍记成 δ_{x_0}，即把定义 (9.1.4) 改成定义

$$\int_{R^n} \delta_{x_0}(x)\phi(x)dx = \phi(x_0), \quad \forall\, \phi \in \mathcal{D}(R^n). \tag{9.1.5}$$

此式中的广义函数 δ_{x_0} 不可能是局部可积函数. 因为对任意 $\phi \in C_0^\infty(R^n \backslash \{x_0\})$，视 $\phi(x_0) = 0$，则 $\phi \in C_0^\infty(R^n) = \mathcal{D}(R^n)$. 由 (9.1.5) 得

$$\int_{R^n \backslash \{x_0\}} \delta_{x_0}(x)\phi(x)dx = \int_{R^n} \delta_{x_0}(x)\phi(x)dx = 0,$$
$$\forall\, \phi \in C_0^\infty(R^n \backslash \{x_0\}). \tag{9.1.6}$$

如果 $\delta_{x_0}(x) \in L^1_{\text{loc}}(R^n)$，利用 5.3 节广义变分法基本引理，由 (9.1.6) 得出

$$\delta_{x_0} = 0, \quad \text{a.e. 在 } R^n \backslash \{x_0\} \text{ 中},$$

从而有

$$\delta_{x_0} = 0, \quad \text{a.e. 在 } R^n \text{ 中},$$

于是

$$\int_{R^n} \delta_{x_0}(x)\phi(x)dx = 0, \quad \forall\, \phi \in C_0^\infty(R^n) = \mathcal{D}(R^n).$$

这与 (9.1.5) 矛盾. 这就证明了 δ_{x_0} 不是普通的局部可积函数.

引理 9.1.2 设 $1 \le p < q < \infty$，μ 与 ν 是 R^n 上两个有界测度. 如果存在正常数 C 使得

$$\left(\int_{R^n} |\phi|^q d\nu\right)^{\frac{1}{q}} = C\left(\int_{R^n} |\phi|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}, \quad \forall\, \phi \in L^\infty(R^n), \tag{9.1.7}$$

则存在最多可数个指标的集合 J, 不同点所成集合 $\{x_j\}_{j\in J} \subset R^n$ 及 $\{\nu_j\}_{j\in J} \subset (0,\infty)$, 使得

$$\nu = \sum_{j\in J} \nu_j \delta_{x_j}, \quad \mu \geq C^{-p} \sum_{j\in J} \nu_j^{p/q} \delta_{x_j}. \tag{9.1.8}$$

特别地有 $\sum\limits_{j\in J} \nu_j^{p/q} < \infty$.

证 对任意可测集 A, 在 (9.1.7) 中取特征函数 $\phi = \chi_A$ 得出

$$\nu(A)^{\frac{1}{q}} \leq C\mu(A)^{\frac{1}{p}}, \quad 即\ \nu(A) \leq C^q \mu(A)^{\frac{q}{p}}.$$

于是当 $\mu(A) = 0$ 时必有 $\nu(A) = 0$, 即测度 ν 关于测度 μ 是绝对连续的. 由 Radon-Nikodym 定理 (附录 1 定理 5) 知道: 存在非负函数 $f \in L^1(R^n, \mu)$ 使得

$$\nu(A) = \int_A f d\mu. \tag{9.1.9}$$

采用记号

$$S = \{x \in R^n | f(x) > 0\}, \tag{9.1.10}$$

$$\lambda(A) = \mu(A \bigcap S). \tag{9.1.11}$$

由 (9.1.9) 及 (9.1.10) 有

$$\nu(A) = \int_{A\setminus S} f d\mu + \int_{A\bigcap S} f d\mu = \int_{A\bigcap S} f d\mu = \nu(A \bigcap S). \tag{9.1.12}$$

因此, 由 (9.1.9) $\sim$ (9.1.12) 知道: 当 $\lambda(A) = \mu(A\bigcap S) > 0$ 时有

$$\nu(A) = \nu(A\bigcap S) = \int_{A\bigcap S} f d\mu > 0.$$

也就是说:

$$当\ \nu(A) = 0\ 时, 必有\ \lambda(A) = 0.$$

这就说明, λ 关于 ν 也是绝对连续的. 再由 Radon-Nikodym 定理, 存在非负函数 $g \in L^1(R^n, \nu)$ 使得

$$\lambda(A) = \int_A g d\nu. \tag{9.1.13}$$

对任意 $\psi \in L^\infty(R^n)$, 在 (9.1.7) 中取 $\phi = \psi\chi_s$ 得

$$\left(\int_{R^n} |\psi|^q \chi_s d\nu\right)^{\frac{1}{q}} \le C \left(\int_{R^n} |\psi|^p \chi_s d\mu\right)^{\frac{1}{p}}.$$

因此，由 (9.1.12) 及 (9.1.11) 得出

$$\left(\int_{R^n} |\psi|^q d\nu\right)^{\frac{1}{q}} \le C \left(\int_{R^n} |\psi|^p d\lambda\right)^{\frac{1}{p}}, \quad \forall \psi \in C^\infty(R^n). \quad (9.1.14)$$

今记

$$\chi_{(g\le k)} = \chi_{\{x\in R^n | g(x)\le k\}}, \quad (9.1.15)$$

$$\nu_k(A) = \int_A g^{\frac{q}{q-p}} \chi_{(g\le k)} d\nu. \quad (9.1.16)$$

对任意 $\phi \in L^\infty(R^n)$, 取 $\psi = g^{\frac{1}{q-p}} \chi_{(g\le k)} \phi \in L^\infty(R^n)$ 代入 (9.1.14) 得

$$\left(\int_{R^n} |\phi|^q d\nu_k\right)^{\frac{1}{q}} \le C \left(\int_{R^n} |\phi|^p g^{\frac{p}{q-p}} \chi_{(g\le k)} d\lambda\right)^{\frac{1}{p}}.$$

由 (9.1.13) 有 $d\lambda = g d\nu$, 从而 $g^{\frac{p}{q-p}} d\lambda = g^{\frac{q}{q-p}} d\nu$. 因而由上式得

$$\left(\int_{R^n} |\phi|^q d\nu_k\right)^{\frac{1}{q}} \le C \left(\int_{R^n} |\phi|^p g^{\frac{q}{q-p}} \chi_{(g\le k)} d\nu\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$= C \left(\int_{R^n} |\phi|^p d\nu_k\right)^{\frac{1}{p}}, \quad \forall\, \phi \in L^\infty(R^n).$$

对任意可测集 A, 以 $\phi = \chi_A$ 代入上式得

$$\nu_k(A)^{\frac{1}{q}} \le C \nu_k(A)^{\frac{1}{p}}.$$

由此知

$$\nu_k(A) = 0 \quad 或 \quad \nu_k(A) \ge C^{-\frac{qp}{q-p}} = \delta > 0. \quad (9.1.17)$$

固定 $k (k = 1, 2, \cdots)$, 对任意 $x \in R^n$, 由 (9.1.17) 知道有下列两种可能情形:

(1) 存在 $\epsilon = \epsilon(x) > 0$ 使得 $\nu_k(B_\epsilon(x)) = 0$;

(2) 对任意 $\epsilon > 0$ 有 $\nu_k(B_\epsilon(x)) \geq \delta$, 从而有

$$\nu_k(\{x\}) = \lim_{\epsilon \downarrow 0} \nu_k(B_\epsilon(x)) \geq \delta. \tag{9.1.18}$$

因为 ν 是有界测度，由 (9.1.16) 得

$$\nu_k(A) = \int_A g^{\frac{q}{q-p}} \chi_{(g \leq k)} d\nu \leq k^{\frac{q}{q-p}} \nu(A), \tag{9.1.19}$$

即 ν_k 也是有界测度，因而满足 (9.1.18) 的点 x 最多只有有限个. 设对固定的 k, 存在 $0 \leq m(k) < \infty$ 及

$$x_j^k \in R^n \text{ 使得 } \nu_k(\{x_j^k\}) \geq \delta,\ j = 1, 2, \cdots, m(k), \tag{9.1.20}$$

且对集合

$$V_k = \{x \in R^n | x \neq x_j^k,\ j = 1, 2, \cdots, m(k)\} \tag{9.1.21}$$

有：当 $x \in V_k$ 时，存在 $\epsilon = \epsilon(x) > 0$ 使得 $\nu_k(B_{\epsilon(x)}(x)) = 0$.

对任意紧集 $C \subset V_k$, 在 C 的开覆盖 $\{B_{\epsilon(x)}\}_{x \in C}$ 中可选出 C 的有限覆盖. 设有 $x_1, \cdots, x_r \in C$, $\epsilon(x_i) = \epsilon_i (i = 1, 2, \cdots, r)$ 使得 $C \subset \bigcup_{i=1}^r B_{\epsilon_i}(x_i)$. 从而

$$\nu_k(C) \leq \sum_{i=1}^r \nu_k(B_{\epsilon_i}(x_i)) = 0, \text{ 即 } \nu_k(C) = 0.$$

对正整数 l, 集合

$$C_l = \{x \in R^n |\ |x| \leq l, |x - x_j^k| \geq \frac{1}{l}, j = 1, 2, \cdots, m(k)\}$$

是 V_k 中的紧集，故有 $\nu_k(C_l) = 0$. 再由

$$C_1 \subset C_2 \subset \cdots, \text{且 } V_k = \bigcup_{l=1}^\infty C_l$$

得出

$$\nu_k(V_k)=\nu_k\left(\bigcup_{l=1}^{\infty}C_l\right)=\lim_{l\to\infty}\nu_k(C_l)=0.$$

再令

$$V=\bigcap_{k=1}^{\infty}V_k, \tag{9.1.22}$$

则由 $V\subset V_k,\ k=1,2,\cdots$ 有

$$\nu_k(V)=0,\quad k=1,2,\cdots.$$

由此式及 (9.1.16), 根据 Lebesgue 控制收敛定理 (附录 1 定理 8) 有

$$\int_V g^{\frac{q}{q-p}}d\nu=\int_V \lim_{k\to\infty} g^{\frac{q}{q-p}}\chi_{(g\le k)}d\nu$$

$$=\lim_{k\to\infty}\int_V g^{\frac{q}{q-p}}\chi_{(g\le k)}d\nu=\lim_{k\to\infty}\nu_k(V)=0.$$

由此式知

$$g=0,\quad \text{a.e. 在 } V \text{ 中 } (\nu).$$

从而由 (9.1.13) 有

$$\lambda(V)=\int_V g d\nu=0.$$

因此，在 (9.1.14) 中取 $\phi=\chi_V$ 得出

$$\nu(V)^{\frac{1}{q}}\le C\lambda(V)^{\frac{1}{p}}=0,\quad \text{从而 } \nu(V)=0.$$

于是，由 V 及 V_k 的定义 (9.1.22) 及 (9.1.21) 有

$$R^n\backslash V=R^n\backslash\bigcap_{k=1}^{\infty}V_k=\bigcup_{k=1}^{\infty}(R^n\backslash V_k)=\bigcup_{k=1}^{\infty}\{x_1^k,\cdots,x_{m(k)}^k\}=\{x_j\}_{j\in J},$$

其中 $\{x_j\}_{j\in J}$ 是集合 $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}\{x_1^k,\cdots,x_{m(k)}^k\}$ 的元素的一个排列，指标集 J 包含可数个或有限个指标 j, 从而有

$$\nu(R^n)=\nu(R^n\backslash V)+\nu(V)=\sum_{j\in J}\nu(\{x_j\}).$$

这个式子可改写成

$$\nu = \sum_{j \in J} \nu_j \delta_{x_j}, \quad \nu_j = \nu(\{x_j\}).$$

这就是 (9.1.8) 中的等式. 取 $\eta(x) \in C_0^\infty(R^n)$ 满足条件:

$$\eta(0) = 1, \ \mathrm{supp}\eta \subset B_1(0), \ 0 \le \eta(x) \le 1, \quad \forall\, x \in B_1(0).$$

对任意 $\epsilon > 0, j \in J$, 在 (9.1.7) 中取 $\phi = \eta(\frac{x-x_j}{\epsilon})$ 得出

$$\begin{aligned}
\nu(\{x_j\})^{\frac{1}{q}} &\le \left(\int_{R^n} \left| \eta\left(\frac{x - x_j}{\epsilon} \right) \right|^q d\nu \right)^{\frac{1}{q}} \\
&\le C \left(\int_{R^n} \left| \eta\left(\frac{x - x_j}{\epsilon} \right) \right|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\le C \mu(B_\epsilon(x_j))^{\frac{1}{p}}.
\end{aligned}$$

在此式中令 $\epsilon \to 0$ 得出

$$\nu(\{x_j\})^{\frac{1}{q}} \le C \mu(\{x_j\})^{\frac{1}{p}}.$$

由此得出

$$\mu(R^n) \ge \sum_{j \in J} \mu(\{x_j\}) \ge C^{-p} \sum_{j \in J} \nu(\{x_j\})^{\frac{p}{q}} = C^{-p} \sum_{j \in J} \nu_j^{\frac{p}{q}}.$$

由此不等式得出 (9.1.8) 中的不等式. 对任意的 $j \in J$, 由于 $x_j \in \bigcup_{k=1}^\infty \{x_1^k, \cdots, x_{m(k)}^k\}$, 根据 (9.1.20) 及 (9.1.19) 有

$$0 < \delta \le \nu_k(\{x_j\}) \le k^{\frac{q}{q-p}} \nu(\{x_j\}).$$

因为 ν 是有界测度, 由上式得出

$$\nu_j = \nu(\{x_j\}) \in (0, \infty).$$

引理 9.1.3[29] 设 $p > 1$. 如果 $\{u_k\}$ 是 $L^p(\Omega)$ 中的有界序列, 且

$$u_j \to u, \quad \text{a.e. 在 } \Omega \text{ 中}, \tag{9.1.23}$$

则有

$$\int_{\Omega}|u_j|^p dx-\int_{\Omega}|u_j-u|^p dx\to\int_{\Omega}|u|^p dx. \tag{9.1.24}$$

证 先证明对任意 $\epsilon>0$, 存在常数 $C_\epsilon>0$ 使得

$$\big||x+y|^p-|x|^p\big|\le\epsilon|x|^p+C_\epsilon|y|^p,\quad \forall x,y\in R. \tag{9.1.25}$$

由于 $p>1$, 对任意 $\delta>0$, 利用 Holder 不等式得

$$\begin{aligned}|x+y|^p&=\left|x+\frac{y}{\delta}\cdot\delta\right|^p\le\left(|x|^p+\left|\frac{y}{\delta}\right|^p\right)(1+\delta^{p'})^{p-1}\\&=(1+\delta^{p'})^{p-1}|x|^p+\delta^{-p}(1+\delta^{p'})^{p-1}|y|^p.\end{aligned} \tag{9.1.26}$$

对任意 $\epsilon>0$, 命 $\delta=[(1+\epsilon)^{\frac{1}{p-1}}-1]^{\frac{1}{p'}}>0$, 即 $(1+\delta^{p'})^{p-1}=1+\epsilon$, 代入 (9.1.26) 得出

$$|x+y|^p\le(1+\epsilon)|x|^p+C_\epsilon|y|^p, \tag{9.1.27}$$

其中

$$C_\epsilon=[(1+\epsilon)^{\frac{1}{p-1}}-1]^{1-p}(1+\epsilon).$$

利用不等式 (9.1.27) 又有

$$|x|^p=|(x+y)+(-y)|^p\le(1+\epsilon)|x+y|^p+C_\epsilon|y|^p,$$

由此得

$$|x|^p-|x+y|^p\le\frac{\epsilon}{1+\epsilon}|x|^p+\frac{C_\epsilon}{1+\epsilon}|y|^p\le\epsilon|x|^p+C_\epsilon|y|^p,$$

将此式与 (9.1.27) 合并就得出 (9.1.25).

因为 $\{u_j\}$ 是 $L^p(\Omega)$ 中的有界序列，由 (9.1.23) 利用 Fatou 定理，可设

$$\|u\|_p\le M,\quad \|u_j\|_p\le M\quad (j=1,2,\cdots), \tag{9.1.28}$$

其中 M 为正常数. 命

$$S_j(x)=|u_j(x)|^p-|u_j(x)-u(x)|^p-|u(x)|^p. \tag{9.1.29}$$

由 (9.1.25) 有

$$
\begin{aligned}
|S_j| &\le \big|\, |(u_j - u) + u|^p - |u_j - u|^p \,\big| + |u|^p \\
&\le \epsilon |u_j - u|^p + C_\epsilon |u|^p + |u|^p.
\end{aligned}
\tag{9.1.30}
$$

再命

$$
v_{\epsilon,j} = (|S_j| - \epsilon |u_j - u|^p)^+, \tag{9.1.31}
$$

则由 (9.1.30) 有

$$
0 \le v_{\epsilon,j} \le (C_\epsilon + 1)|u|^p. \tag{9.1.32}
$$

由 (9.1.23), (9.1.29) 及 (9.1.31) 知道：对任意取定的正数 ϵ 有

$$
v_{\epsilon,j} \to 0, \quad \text{a.e. 在 } \Omega \text{ 中} \ \ (\text{当 } j \to \infty).
$$

因此，利用 Lebesgue 控制收敛定理，由 (9.1.32) 得

$$
\int_\Omega v_{\epsilon,j} dx \to 0 \ \ (\text{当 } j \to \infty).
$$

由 (9.1.31) 有

$$
|S_j| \le v_{\epsilon,j} + \epsilon |u_j - u|^p \le v_{\epsilon,j} + 2^p \epsilon (|u_j|^p + |u|^p).
$$

因此，利用不等式 (9.1.28) 得出

$$
\begin{aligned}
&\left| \int_\Omega S_j dx \right| \le \int_\Omega |S_j| dx \\
&\le \int_\Omega v_{\epsilon,j} dx + 2^p \epsilon \left(\int_\Omega |u_j|^p dx + \int_\Omega |u|^p dx \right) \\
&\le \int_\Omega v_{\epsilon,j} dx + 2^{p+1} M^p \epsilon.
\end{aligned}
$$

对任意取定的正数 ϵ, 由上式有

$$
\overline{\lim_{j\to\infty}} \left| \int_\Omega S_j dx \right| \le \lim_{j\to\infty} \int_\Omega v_{\epsilon,j} dx + 2^{p+1} M^p \epsilon = 2^{p+1} M^p \epsilon.
$$

因为 ϵ 为任意正数，由上式得出

$$0 \le \underline{\lim_{j\to\infty}} \left| \int_\Omega S_j dx \right| \le \overline{\lim_{j\to\infty}} \left| \int_\Omega S_j dx \right| = 0.$$

由此知

$$\lim_{j\to\infty} \left| \int_\Omega S_j dx \right| = 0.$$

从而有

$$\lim_{j\to\infty} \int_\Omega S_j dx = 0.$$

由此式及 (9.1.29) 得出 (9.1.24). 证完.

9.2 集中紧性原理

本节讲述 Lions P. L. 的集中紧性原理，它是研究具临界指数的拟线性椭圆方程边值问题的重要工具.

定义 设序列 $\{u_k\} \subset L^1(R^n)$, 且 $u_k \ge 0$, a.e. 在 R^n 中， μ 是 R^n 上的测度. 如果

$$\int_{R^n} \phi u_k dx \to \int_{R^n} \phi d\mu, \quad \forall \phi \in L^\infty(R^n) \bigcap C(R^n),$$

则称序列 $\{u_k\}$ 弱收敛于测度 μ, 记为 $u_k \overset{w}{\to} \mu$.

定理 9.2.1(集中紧性原理)[33] 设 $1 < p < n$, $p^* = \dfrac{np}{n-p}$, Ω 是 R^n 中的一个有界区域， $\{u_k\}$ 是 $W_0^{1,p}(\Omega)$ 中的有界序列，在 Ω 外视 $u_k = 0$, $\{u_k\}$ 并满足下列条件

$$\begin{cases} u_k \rightharpoonup u, & \text{在 } W_0^{1,p}(R^n) \text{ 中}, \\ u_k \rightharpoonup u, & \text{在 } L^{p^*}(R^n) \text{ 中}, \\ u_k \to u, & \text{在 } L^p(R^n) \text{ 中}, \\ u_k \to u, & \text{a.e.在 } R^n \text{ 中}, \end{cases} \tag{9.2.1}$$

$$\begin{cases} |Du_k|^p \overset{w}{\to} \mu, \\ |u_k|^{p^*} \overset{w}{\to} \nu, \end{cases} \tag{9.2.2}$$

其中 μ, ν 均为 R^n 上的有界 Lebesgue-Stieltjes 测度. 那么

(i) 存在最多可数的指标集 J, 不同点的集合 $\{x_j\}_{j\in J} \subset R^n$ 及 $\{\nu_j\}_{j\in J} \subset (0,\infty)$, 使得

$$\nu = |u|^{p^*} + \sum_{j\in J} \nu_j \delta_{x_j}; \tag{9.2.3}$$

(ii) 存在 $\mu_j \geq S\nu_j^{\frac{p}{p^*}}$ 使得

$$\mu \geq |Du|^p + \sum_{j\in J} \mu_j \delta_{x_j}, \tag{9.2.4}$$

其中 S 为 Sobolev 嵌入 $W_0^{1,p}(\Omega) \subsetneq L^{p^*}(\Omega)$ 的最佳常数, 即

$$S = \inf_{0\neq u\in W_0^{1,p}(\Omega)} \frac{||Du||_p^p}{||u||_{p^*}^p}. \tag{9.2.5}$$

证 对任意 $\phi \in C_0^1(\Omega)$, 由嵌入定理 5.6.1 及 S 的定义 (9.2.5) 得出

$$\begin{aligned} \left(\int_{R^n} |\phi u_k|^{p^*} dx\right)^{\frac{1}{p^*}} S^{\frac{1}{p}} &\leq \left(\int_{R^n} |D(\phi u_k)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \left(\int_{R^n} |\phi|^p |Du_k|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_{R^n} |D\phi|^p |u_k|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}. \end{aligned} \tag{9.2.6}$$

因为 $u_k \to u$ 在 $L^p(R^n)$ 中, 故有

$$\int_{R^n} |u_k D\phi - uD\phi|^p dx \leq \sup_{R^n} |D\phi|^p \int_{R^n} |u_k - u|^p dx \to 0,$$

$$\forall\ \phi \in C_0^1(\Omega). \tag{9.2.7}$$

利用 Brezis-Lieb 引理 9.1.3 得出

$$\int_{R^n} |u_k D\phi|^p dx - \int_{R^n} |u_k D\phi - uD\phi|^p dx \to \int_{R^n} |uD\phi|^p dx. \tag{9.2.8}$$

以 (9.2.7) 代入 (9.2.8) 得出

$$\int_{R^n}|u_kD\phi|^pdx\to\int_{R^n}|uD\phi|^pdx,\quad\forall\,\phi\in C_0^1(\Omega).$$

在 (9.2.6) 中令 $k\to\infty$, 由上式及 (9.2.2) 得出

$$\left(\int_{R^n}|\phi|^{p^*}d\nu\right)^{\frac{1}{p^*}}S^{\frac{1}{p}}\leq\left(\int_{R^n}|\phi|^pd\mu\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\int_{R^n}|D\phi|^p|u|^pdx\right)^{\frac{1}{p}},$$
$$\forall\,\phi\in C_0^1(\Omega).\tag{9.2.9}$$

(1) 先讨论 $u=0$ 的情形. 此时 (9.2.9) 成为

$$\left(\int_{R^n}|\phi|^{p^*}d\nu\right)^{\frac{1}{p^*}}S^{\frac{1}{p}}\leq\left(\int_{R^n}|\phi|^pd\mu\right)^{\frac{1}{p}},\quad\forall\,\phi\in C_0^1(\Omega).\tag{9.2.10}$$

我们来证明 (9.2.10) 中的不等式对任意 $\phi\in L^\infty(R^n)$ 也成立. 由附录 1, Lusin 定理 2 及其注, 当 $\phi\in L^\infty(R^n)$ 时, 对任意 $\epsilon>0$, 存在 $\phi_0\in C(R^n)$ 使得

$$\sup_{x\in R^n}|\phi_0(x)|\leq\sup_{x\in R^n}|\phi(x)|=||\phi||_\infty,$$

且对集合

$$A=\{x\in R^n|\phi_0(x)\neq\phi(x)\}$$

有

$$\mu(A)<\left(\frac{\epsilon}{4||\phi||_\infty}\right)^p,\quad\nu(A)<\left(\frac{\epsilon}{4||\phi||_\infty}\right)^{p^*}.$$

因而有

$$\left(\int_{R^n}|\phi_0-\phi|^pd\mu\right)^{\frac{1}{p}}\leq\left(\int_A|\phi_0-\phi|^pd\mu\right)^{\frac{1}{p}}\leq2||\phi||_\infty\mu(A)^{\frac{1}{p}}<\frac{\epsilon}{2}.\tag{9.2.11}$$

同理

$$\left(\int_{R^n}|\phi_0-\phi|^{p^*}d\nu\right)<\frac{\epsilon}{2}.\tag{9.2.11$'$}$$

取函数 $\eta(x) \in C_0^\infty(R^n)$ 满足

$$\eta(x) = 1, \quad 当\ x \in \Omega,$$

命 $\psi = \phi_0\eta \in C_0(R^n)$, 则 $\psi - \phi_0 \in L^\infty(R^n) \bigcap C(R^n)$, 且有

$$\int_{R^n} |\psi - \phi_0|^p |Du_k|^p dx = \int_{R^n \setminus \Omega} |\psi - \phi_0|^p |Du_k|^p dx = 0.$$

根据 $|Du_k|^p \xrightarrow{w} \mu$ 的定义有

$$\int_{R^n} |\psi - \phi_0|^p |Du_k|^p dx \to \int_{R^n} |\psi - \phi_0|^p d\mu,$$

因而有

$$\int_{R^n} |\psi - \phi_0|^p d\mu = 0. \tag{9.2.12}$$

同理有

$$\int_{R^n} |\psi - \phi_0|^p d\nu = 0. \tag*{(9.2.12)$'$}$$

因为 $\psi \in C_0(R^n)$, 由 ψ 的一致连续性，存在 $h_0 = h_0(\epsilon) > 0$, 使得

$$|\psi(x) - \psi(y)| < \epsilon(2\max\{\mu(R^n)^{\frac{1}{p}}, \nu(R^n)^{\frac{1}{p^*}}\})^{-1},$$

$$当\ x, y \in R^n,\ |x - y| < h_0. \tag{9.2.13}$$

根据 (5.2.2), 对 ψ 作关于平均核 (5.2.1) 的平均函数

$$\psi_h(x) = \int_{R^n} \rho_h(x - y)\psi(y)dy \in C_0^\infty(R^n). \tag{9.2.14}$$

当 $h \le h_0$ 时，由 (9.2.14) 及 (9.2.13) 得出

$$\begin{aligned} |\psi_h(x) - \psi(x)| &= \left|\int_{R^n} \rho_h(x - y)[\psi(x) - \psi(y)]dy\right| \\ &\le \int_{|y-x|<h} \rho_h(x - y)|\psi(y) - \psi(x)|dy \\ &< \frac{\epsilon}{2\mu(R^n)^{\frac{1}{p}}} \int_{|y-x|<h} \rho_h(x - y)dy \\ &= \frac{\epsilon}{2\mu(R^n)^{\frac{1}{p}}}. \end{aligned}$$

由此知道

$$\left(\int_{R^n}|\psi_h(x)-\psi(x)|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}<\frac{\epsilon}{2},\quad \text{当 } h\le h_0. \tag{9.2.15}$$

同理可得

$$\left(\int_{R^n}|\psi_h(x)-\psi(x)|^{p^*} d\nu\right)^{\frac{1}{p^*}}<\frac{\epsilon}{2},\quad \text{当 } h\le h_0. \tag{9.2.15$'$}$$

由 (9.2.11), (9.2.12) 及 (9.2.15) 得出

$$\begin{aligned}
&\left(\int_{R^n}|\psi_h(x)-\phi(x)|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}\\
\le&\left(\int_{R^n}|\psi_h(x)-\psi(x)|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\int_{R^n}|\psi(x)-\phi_0(x)|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}\\
&+\left(\int_{R^n}|\phi_0(x)-\phi(x)|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}\\
<&\frac{\epsilon}{2}+0+\frac{\epsilon}{2}=\epsilon,\quad \text{当 } h\le h_0.
\end{aligned}$$

同理可得

$$(\int_{R^n}|\psi_h(x)-\phi(x)|^{p^*} d\nu)^{\frac{1}{p^*}}<\epsilon,\quad \text{当 } h\le h_0.$$

这就证明了：存在 $\{\phi_i\}\equiv\{\psi_{h_i}\}\subset C_0^\infty(R^n)$ 使得

$$||\phi_i-\phi||_{L^p(R^n,\mu)}=||\psi_{h_i}-\phi||_{L^p(R^n,\mu)}\to 0,\quad \text{当 } i\to\infty\ (h_i\to 0),$$

$$||\phi_i-\phi||_{L^{p^*}(R^n,\nu)}=||\psi_{h_i}-\phi||_{L^{p^*}(R^n,\nu)}\to 0,\quad \text{当 } i\to\infty\ (h_i\to 0).$$

因此有

$$\begin{cases}||\phi_i||_{L^p(R^n,\mu)}\to||\phi||_{L^p(R^n,\mu)},\quad \text{当 } i\to\infty,\\ ||\phi_i||_{L^{p^*}(R^n,\nu)}\to||\phi||_{L^{p^*}(R^n,\nu)},\quad \text{当 } i\to\infty.\end{cases} \tag{9.2.16}$$

由于 $\{\phi_i\}\subset C_0^\infty(R^n)$, 由 (9.2.10) 有

$$||\phi_i||_{L^{p^*}(R^n,\nu)}S^{\frac{1}{p}}\le ||\phi_i||_{L^p(R^n,\mu)},\quad i=1,2,\cdots.$$

在此式中令 $i\to\infty$, 利用 (9.2.16) 得出

$$||\phi||_{L^{p^*}(R^n,\nu)}S^{\frac{1}{p}}\le ||\phi||_{L^p(R^n,\mu)},$$

即 (9.2.10) 中的不等式对任意 $\phi\in L^\infty(\Omega)$ 也成立. 因此, 利用引理 9.1.2 得出: 存在最多可数个指标的集合 J, 不同的点集 $\{x_j\}_{j\in J}\subset R^n$ 及 $\{\nu_j\}_{j\in J}\subset(0,\infty)$, 使得

$$\nu=\sum_{j\in J}\nu_j\delta_{x_j},\quad \mu\ge S\sum_{j\in J}\nu_j^{p/p^*}\delta_{x_j}.$$

记 $\mu_j=S\nu_j^{p/p^*}$, 则 $\mu\ge\sum_{j\in J}\mu_j\delta_{x_j}$. 这就证明了定理当 $u=0$ 是正确的.

(2) 现在再讨论一般情形. 命 $v_k=u_k-u$, 则由 (9.2.1) 有

$$\begin{cases} v_k\rightharpoonup 0, & \text{在 } W_0^{1,p}(R^n) \text{ 中},\\ v_k\rightharpoonup 0, & \text{在 } L^{p^*}(R^n) \text{ 中},\\ v_k\to 0, & \text{在 } L^p(R^n) \text{ 中},\\ v_k\to 0, & \text{a.e.在 } R^n \text{ 中}.\end{cases}\tag{9.2.1$'$}$$

由 (9.2.1)$'$ 的前两式知道 $\{|Dv_k|^p\}$ 及 $\{|v_k|^{p^*}\}$ 都是 $L^1(R^n)$ 中有界的非负函数序列, 由附录 1 定理 9 得出: 存在 $\{v_k\}$ 的子序列 (仍记此子序列为 $\{v_k\}$) 及有界测度 $\bar\mu$ 及 $\bar\nu$, 使得

$$\begin{cases} |Dv_k|^p\overset{w}{\to}\bar\mu,\\ |v_k|^{p^*}\overset{w}{\to}\bar\nu.\end{cases}\tag{9.2.2$'$}$$

(9.2.1)$'$ 及 (9.2.2)$'$ 说明序列 $\{v_k\}$ 符合上面已讨论过的情形 (1), 因而存在最多可数的指标集 J, 不同点的集合 $\{x_j\}_{j\in J}$ 及 $\{\nu_j\}_{j\in J}\subset$

$(0,\infty)$, 使得

$$\bar{\nu}=\sum_{j\in J}\nu_j\delta_{x_j},\ \bar{\mu}\geq\sum_{j\in J}\mu_j\delta_{x_j},\ \nu_j\geq S\nu_j^{\frac{p}{p^*}}. \tag{9.2.17}$$

由 Brezis-Lieb 引理 9.1.3, 对任意 $\phi\in L^\infty(R^n)\bigcap C(R^n)$ 有

$$\int_{R^n}|\phi u_k|^{p^*}dx-\int_{R^n}|\phi v_k|^{p^*}dx\to\int_{R^n}|\phi u|^{p^*}dx. \tag{9.2.18}$$

而由 (9.2.2) 及 (9.2.2)$'$, 根据定义有

$$\int_{R^n}|\phi u_k|^{p^*}dx\to\int_{R^n}|\phi|^{p^*}d\nu, \tag{9.2.19}$$

$$\int_{R^n}|\phi v_k|^{p^*}dx\to\int_{R^n}|\phi|^{p^*}d\bar{\nu}. \tag{9.2.20}$$

由 (9.2.18)~(9.2.20) 得出

$$\int_{R^n}|\phi|^{p^*}d\nu-\int_{R^n}|\phi|^{p^*}d\bar{\nu}=\int_{R^n}|\phi|^{p^*}|u|^{p^*}dx.$$

因为 $\phi\in L^\infty(R^n)\bigcap C(R^n)$ 是任意的，由上式知道

$$\nu-\bar{\nu}=|u|^{p^*}. \tag{9.2.21}$$

由 (9.2.21) 及 (9.2.17) 得出 (9.2.3).

取 $\eta(t)\in C^1([0,\infty))$ 满足

$$\eta(t)=\begin{cases}1, & 当 0\leq t\leq\frac{1}{2}\\ 0, & 当 t\geq 1,\end{cases}$$

$$0\leq\eta(t)\leq 1,\quad |\eta'(t)|\leq 3,\quad \forall t\in[0,\infty). \tag{9.2.22}$$

对任意 $\varepsilon>0, j\in J$, 在 (9.2.9) 中取 $\phi(x)=\eta\left(\frac{|x-x_j|}{\varepsilon}\right)$, 再利用

Holder 不等式得出

$$\nu_j^{\frac{1}{p^*}} S^{\frac{1}{p}} = \nu(\{x_j\})^{\frac{1}{p^*}} S^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq \left(\int_{R^n} \left| \eta\left(\frac{|x-x_j|}{\varepsilon} \right) \right|^{p^*} d\nu \right)^{\frac{1}{p^*}} S^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq \left(\int_{R^n} \left| \eta\left(\frac{|x-x_j|}{\varepsilon} \right) \right|^{p} d\mu \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_{R^n} \left| \eta'\left(\frac{|x-x_j|}{\varepsilon} \right) \frac{1}{\varepsilon} \right|^{p} |u(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq \mu(B_\varepsilon(x_j))^{\frac{1}{p}} + \left(\int_{R^n} \left| \eta'\left(\frac{|x-x_j|}{\varepsilon} \right) \frac{1}{\varepsilon} \right|^{n} dx \right)^{\frac{1}{n}} \left(\int_{B_\varepsilon(x_j)} |u(x)|^{p^*} dx \right)^{\frac{1}{p^*}} \tag{9.2.23}$$

利用变数代换 $x = x_j + \varepsilon y$ 及 (9.2.22) 得出

$$\int_{R^n} \left| \eta'\left(\frac{|x-x_j|}{\varepsilon} \right) \frac{1}{\varepsilon} \right|^n dx = \int_{B_1(0)} \left| \eta'(|y|) \frac{1}{\varepsilon} \right|^n \varepsilon^n dy \leq 3^n \omega_n$$

其中 ω_n 为 n 维单位球的体积. 以此式代入 (9.2.23) 得出

$$\nu_j^{\frac{1}{p^*}} S^{\frac{1}{p}} \leq \mu(B_\varepsilon(x_j))^{\frac{1}{p}} + 3\omega_n^{\frac{1}{n}} \left(\int_{B_\varepsilon(x_j)} |u(x)|^{p^*} dx \right)^{\frac{1}{p^*}}.$$

令 $\varepsilon \to 0$, 由上式得出

$$\nu_j^{\frac{1}{p^*}} S^{\frac{1}{p}} \leq \mu(\{x_j\})^{\frac{1}{p}}, \quad \forall j \in J,$$

$$\mu(\{x_j\}) \geq S \nu_j^{\frac{p}{p^*}}, \quad \forall j \in J. \tag{9.2.24}$$

因为 $\{Du_k\}$ 在 $L^p(\Omega)$ 中弱收敛于 Du, 由引理 9.1.1, 对任意非负函数 $\varphi \in L^\infty(R^n)$ 有

$$\int_{R^n} \varphi |Du|^p dx \leq \varliminf_{k\to\infty} \int_{R^n} \varphi |Du_k|^p dx. \tag{9.2.25}$$

由 $|Du_k|^p \xrightarrow{w} \mu$ 的定义有

$$\int_{R^n} \varphi |Du_k|^p dx \to \int_{R^n} \varphi d\mu, \quad \forall \varphi \in L^\infty(R^n) \cap C(R^n). \tag{9.2.26}$$

合并 (9.2.25) 及 (9.2.26) 知道：对任意非负函数 $\varphi \in L^\infty(R^n) \cap C(R^n)$ 有

$$\int_{R^n} \varphi |Du|^p dx \le \int_{R^n} \varphi d\mu. \tag{9.2.27}$$

今证明 (9.2.27) 对任意非负函数 $\varphi \in L^\infty(R^n)$ 都能成立．设 $\psi \in L^\infty(R^n)$ 且 $\psi \ge 0$ a.e. 在 R^n 中．对任意 $\varepsilon > 0$, 利用积分的绝对连续性，存在 $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, 使得

$$\int_E |Du|^p dx < \frac{\varepsilon}{2\|\psi\|_\infty}, \quad 当 E \subset R^n, m(E) < \delta,$$

其中 m 为 Lebesgue 测度．由附录 1, Lusin 定理 2 及其注知道：对 R^n 上可测函数 ψ, 存在 $\varphi \in C(R^n)$ 使得：

集合 $F = \{x \in R^n | \varphi(x) \ne \psi(x)\}$ 满足

$$m(F) < \delta, \mu(F) < \frac{\varepsilon}{2\|\psi\|_\infty},$$

$$\sup_{x \in R^n} |\varphi(x)| \le \sup_{x \in R^n} |\psi(x)| = \|\psi\|_\infty.$$

因此 $|\varphi| \in L^\infty(R^n) \cap C(R^n)$, 且有

$$\left| \int_{R^n} |\varphi| \, |Du|^p dx - \int_{R^n} \psi |Du|^p dx \right| \le 2\|\psi\|_\infty \int_F |Du|^p dx < \varepsilon,$$

$$\left| \int_{R^n} |\varphi| d\mu - \int_{R^n} \psi d\mu \right| \le 2\|\psi\|_\infty \int_F d\mu < \varepsilon.$$

这就证明了：对非负函数 $\psi \in L^\infty(R^n)$, 存在 $\{\varphi_k\} \subset L^\infty(R^n) \cap C(R^n)$ 使得

$$\int_{R^n} |\varphi_k| |Du|^p dx \to \int_{R^n} \psi |Du|^p dx, \quad 当 k \to \infty, \tag{9.2.28}$$

$$\int_{R^n} |\varphi_k| d\mu \to \int_{R^n} \psi d\mu, \quad 当 k \to \infty. \tag{9.2.29}$$

对于 $|\varphi_k| \in L^\infty(R^n) \cap C(R^n)$, 在 (9.2.27) 中取 $\varphi = |\varphi_k|$ 得出

$$\int_{R^n} |\varphi_k| |Du|^p dx \le \int_{R^n} |\varphi_k| d\mu.$$

对此式令 $k \to \infty$ 取极限，并利用 (9.2.28) 及 (9.2.29) 得出

$$\int_{R^n} \psi |Du|^p dx \le \int_{R^n} \psi d\mu \tag{9.2.30}$$

对任意非负函数 $\psi \in L^\infty(R^n)$ 均成立. 对任意可测集 A, 取 ψ 为 A 上的特征函数代入 (9.2.30) 得出

$$\int_A |Du|^p dx \le \mu(A).$$

对任意可测集 $A \subset R^n$, 由上式得出

$$\begin{aligned}\mu(A) &= \mu(A \backslash \{x_j\}_{j\in J}) + \mu(A \cap \{x_j\}_{j\in J}) \\ &\ge \int_{A\backslash \{x_j\}_{j\in J}} |Du|^p dx + \mu(A \cap \{x_j\}_{j\in J}) \\ &= \int_A |Du|^p dx + \mu(A \cap \{x_j\}_{j\in J}),\end{aligned}$$

由此得出

$$\mu(R^n) \ge \int_{R^n} |Du|^p dx + \sum_{j\in J} \mu(\{x_j\}).$$

根据 (9.2.24), 由上式得出

$$\mu \ge |Du|^p + \sum_{j\in J} \mu_j \delta_{x_j},$$

其中 $\mu_j \ge S\nu_j^{\frac{p}{p^*}}$. 证完.

9.3 具临界指数的拟线性椭圆方程

设 $1 < p < n$, Ω 是 R^n 中的有界区域. 本节证明具临界指数的拟线性椭圆方程 Dirichlet 问题

$$\begin{cases} -\Delta_p u \equiv -\mathrm{div}(|Du|^{p-2}Du) = |u|^{p^*-2}u + \lambda |u|^{p-2}u, & \text{在 } \Omega \text{ 中}, \\ u = 0, & \text{在 } \partial\Omega \text{ 上}, \end{cases} \tag{9.3.1}$$

在 $W_0^{1,p}(\Omega)$ 中有非平凡弱解，其中 $p^*=\dfrac{np}{n-p}$ 是 Sobolev 嵌入定理 5.6.1 的临界指数.

类似于 3.5 节的讨论，我们先对 p−Laplace 算子 Δ_p 的特征值问题建立解的存在定理如下.

定理 9.3.1 设 $1<p<\infty$. 特征值问题

$$\begin{cases} -\Delta_p u \equiv -\mathrm{div}(|Du|^{p-2}Du)=\lambda|u|^{p-2}u, & 在\ \Omega\ 中, \\ u=0, & 在\ \partial\Omega\ 上, \end{cases} \tag{9.3.2}$$

在 $R\times W_0^{1,p}(\Omega)$ 中有解 (λ,u), $u\neq 0$, 其最小特征值为

$$\lambda_1=\inf_{0\neq u\in W_0^{1,p}(\Omega)}\frac{||Du||_p^p}{||u||_p^p}=\inf_{u\in W_0^{1,p}(\Omega),||u||_p=1}||Du||_p^p>0, \tag{9.3.3}$$

对应于 λ_1 的 (广义) 特征函数 $u\in W_0^{1,p}(\Omega)$ 满足

$$\int_\Omega |Du|^{p-2}Du\cdot D\phi dx=\lambda_1\int_\Omega |u|^{p-2}u\phi dx, \quad \forall\ \phi\in W_0^{1,p}(\Omega), \tag{9.3.4}$$

且特征函数可以取成非负函数.

证 由嵌入定理 5.6.1, 存在常数 $C>0$ 使得

$$||u||_p\le C||Du||_p, \quad \forall\ u\in W_0^{1,p}(\Omega).$$

因此

$$\frac{||Du||_p^p}{||u||_p^p}\ge C^p, \quad \forall\ u\in W_0^{1,p}(\Omega).$$

从而可由 (9.3.3) 定义实数值 λ_1, 它满足

$$\lambda_1\ge C^p>0.$$

由 λ_1 的定义 (9.3.3), 选取极小化序列

$$\{u_k\}\subset W_0^{1,p}(\Omega),\ ||u_k||_p=1\ (k=1,2,\cdots) \tag{9.3.5}$$

使得

$$\lim_{k\to\infty}||Du_k||_p^p=\lambda_1. \tag{9.3.6}$$

由 (9.3.6) 知道 $\{||Du_k||_p\}$ 是有界数列，即 $\{u_k\}$ 是空间 $W_0^{1,p}(\Omega)$ 中的有界集. 由定理 5.7.1, $W_0^{1,p}(\Omega)\subsetneq L^p(\Omega)$ 是紧嵌入，因而 $\{u_k\}$ 是 $L^p(\Omega)$ 中的列紧集. 从而存在 $u\in L^p(\Omega)$ 及 $\{u_k\}$ 的子序列，此子序列仍记为 $\{u_k\}$, 使得

$$u_k\to u,\quad 在\ L^p(\Omega)\ 中. \tag{9.3.7}$$

由此，根据 (9.3.5) 得出

$$||u||_p=1. \tag{9.3.8}$$

由 (9.3.3) 有

$$||Dv||_p^p\ge\lambda_1||v||_p^p,\quad\forall\ v\in W_0^{1,p}(\Omega),$$

从而有

$$\left\|\frac{Du_k+Du_l}{2}\right\|_p^p\ge\lambda_1\left\|\frac{u_k+u_l}{2}\right\|_p^p. \tag{9.3.9}$$

由 (9.3.7) 及 (9.3.8) 又有

$$\left\|\frac{u_k+u_l}{2}-u\right\|_p\le\frac{1}{2}||u_k-u||_p+\frac{1}{2}||u_l-u||_p\to 0, 当\ k,l\to\infty,$$

$$\left\|\frac{u_k+u_l}{2}\right\|_p\to||u||_p=1,\quad 当\ k,l\to\infty. \tag{9.3.10}$$

由 Clarkson 不等式 (参阅文献 [9] 定理 2.28)

$$\left\|\frac{Du_k+Du_l}{2}\right\|_p^p+\left\|\frac{Du_k-Du_l}{2}\right\|_p^p\le\frac{1}{2}||Du_k||_p^p+\frac{1}{2}||Du_l||_p^p,$$

$$当\ 2\le p<\infty,$$

$$\left\|\frac{Du_k+Du_l}{2}\right\|_p^{p'}+\left\|\frac{Du_k-Du_l}{2}\right\|_p^{p'}\le\left(\frac{1}{2}||Du_k||_p^p+\frac{1}{2}||Du_l||_p^p\right)^{\frac{p'}{p}},$$

$$\text{当 } 1 < p \le 2$$

及 (9.3.9), (9.3.6), (9.3.10) 得出:

当 $2 \le p < \infty$ 时有

$$2^{-p}||Du_k - Du_l||_p^p = \left\|\frac{Du_k - Du_l}{2}\right\|_p^p$$

$$\le \frac{1}{2}||Du_k||_p^p + \frac{1}{2}||Du_l||_p^p - \lambda_1 \left\|\frac{Du_k + Du_l}{2}\right\|_p^p$$

$$\to \frac{1}{2}\lambda_1 + \frac{1}{2}\lambda_1 - \lambda_1 = 0, \quad \text{当 } k, l \to \infty,$$

当 $1 < p \le 2$ 时有

$$2^{-p'}||Du_k - Du_l||_p^{p'} = \left\|\frac{Du_k - Du_l}{2}\right\|_p^{p'}$$

$$\le \left(\frac{1}{2}||Du_k||_p^p + \frac{1}{2}||Du_l||_p^p\right)^{\frac{p'}{p}} - \lambda_1^{\frac{p'}{p}} \left\|\frac{Du_k + Du_l}{2}\right\|_p^{p'}$$

$$\to \left(\frac{1}{2}\lambda_1 + \frac{1}{2}\lambda_1\right)^{\frac{p'}{p}} - \lambda_1^{\frac{p'}{p}} = 0, \quad \text{当 } k, l \to \infty.$$

因而对 $1 < p < \infty$ 均有

$$||Du_k - Du_l||_p \to 0, \quad \text{当 } k, l \to \infty.$$

这就说明 $\{u_k\}$ 为 $W_0^{1,p}(\Omega)$ 中的 Cauchy 序列, 且由 (9.3.7) 得出

$$Du_k \to Du \text{ 在 } L^p(\Omega) \text{ 中}, \quad \text{当 } k \to \infty, \tag{9.3.11}$$

$$u \in W_0^{1,p}(\Omega). \tag{9.3.12}$$

由 (9.3.6), (9.3.11) 及 (9.3.3) 得出

$$||Du||_p^p = \lambda_1 = \inf_{0 \ne v \in W_0^{1,p}(\Omega)} \frac{||Dv||_p^p}{||v||_p^p}. \tag{9.3.13}$$

因此，对任意 $\phi \in W_0^{1,p}(\Omega)$, 由 (9.3.12) 知 $u+t\phi \in W_0^{1,p}(\Omega)$, 从而对函数

$$g(t)=\frac{||Du+tD\phi||_p^p}{||u+t\phi||_p^p}, \tag{9.3.14}$$

由 (9.3.8) 有

$$\lambda_1=||Du||_p^p=\frac{||Du||_p^p}{||u||_p^p}=g(0)=\min_{t\in R} g(t). \tag{9.3.15}$$

因此必有

$$g'(0)=0. \tag{9.3.16}$$

以 (9.3.14) 代入 (9.3.16) 经计算得出

$$\int_\Omega |Du|^{p-2}Du\cdot D\phi dx\int_\Omega |u|^p dx-\int_\Omega |Du|^p dx\int_\Omega |u|^{p-2}u\phi dx=0,$$

$$\forall\ \phi \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

由 (9.3.8) 及 (9.3.15), 上式可改写成

$$\int_\Omega |Du|^{p-2}Du\cdot D\phi dx=\lambda_1\int_\Omega |u|^{p-2}u\phi dx,\quad \forall\ \phi\in W_0^{1,p}(\Omega).$$

此式即 (9.3.4). 根据 (9.3.15) 及 $\lambda_1>0$ 知道 $u\neq 0$, 从而 λ_1 为问题 (9.3.2) 的特征值，且对任意实数 $k\neq 0$, ku 为对应于 λ_1 的特征函数. 关于 λ_1 是最小特征值及对应特征函数 u 可以取成非负函数的证明类似 3.5 节相应结果的证明.

注 $p-$Laplace 算子的特征值问题 (9.3.2) 有特征值的无限序列 $\{\lambda_k\}$ 满足

$$\lambda_1\le\lambda_2\le\cdots\le\lambda_k\le\cdots,$$

$$\lim_{k\to\infty}\lambda_k=\infty.$$

这一结果可参阅文献 [28] 定理 5.3, 定理 5.4.

由 (9.2.5) 定义的 Sobolev 嵌入 $W_0^{1,p}(\Omega)\subsetneq L^{p^*}(\Omega)$ 的最佳常数

$$S=\inf_{0\neq u\in W_0^{1,p}(\Omega)}\frac{||Du||_p^p}{||u||_{p^*}^p} \tag{9.3.17}$$

与区域 Ω 无关，且当 $\Omega = R^n$ 时，(9.3.17) 定义的下确界 S 由函数

$$U_\epsilon = \frac{C_\epsilon}{(\epsilon + |x|^{p'})^{\frac{n-p}{p}}} \ (\epsilon > 0) \tag{9.3.18}$$

达到，参阅文献 [36]. 因此，我们可以把关于 $W_0^{1,2}(\Omega)$ 的引理 8.3.1 推广到 $W_0^{1,p}(\Omega)$ 中去.

引理 9.3.2 设 $1 < p^2 \leq n$, 对有界区域 $\Omega \subset R^n$ 命

$$Q_\lambda(u) = \frac{||Du||_p^p - \lambda ||u||_p^p}{||u||_{p^*}^p}, \tag{9.3.19}$$

$$S_\lambda = \inf_{0 \neq u \in W_0^{1,p}(\Omega)} Q_\lambda(u), \tag{9.3.20}$$

则有

$$S_\lambda < S, \quad \forall\, \lambda > 0. \tag{9.3.21}$$

证 因为 $Q_\lambda(u)$ 在坐标平移下是不变的，不妨设 $B_\delta(0) \subset \Omega \subset B_R(0)$, $0 < \delta < 1 < R$. 选取满足条件 (8.3.7) 的截割函数 $\eta(x) \in C_0^\infty(\Omega)$, 命

$$u_\epsilon(x) = \frac{\eta(x)}{(\epsilon + |x|^{p'})^{\frac{n-p}{p}}}. \tag{9.3.22}$$

仿 (8.3.9)~(8.3.11) 的证明可得：当 $\epsilon \to 0$ 时有

$$\begin{cases} ||u_\epsilon||_{p^*}^p = ||U||_{p^*}^p \epsilon^{-\frac{n-p}{p}} + O(1), \\ ||u_\epsilon||_{p^*}^p = \begin{cases} K_1 \epsilon^{-\frac{n-p^2}{p}} + O(1), & \text{当 } n > p^2, \\ K_2 |\ln \epsilon| + O(1), & \text{当 } n = p^2, \end{cases} \\ ||Du_\epsilon||_p^p = ||DU||_p^p \epsilon^{-\frac{n-p}{p}} + O(1), \end{cases} \tag{9.3.23}$$

其中 K_1, K_2 为正常数，U 为当 $\Omega = R^n$ 时达到下确界 (9.3.17) 的函数之一：

$$U(x) = \frac{1}{(\epsilon + |x|^{p'})^{\frac{n-p}{p}}}.$$

以 (9.3.23) 代入 (9.3.19) 得出估计：对充分小的 ϵ 有

$$Q_\lambda(u_\epsilon) = S + O(\epsilon^{\frac{n-p}{p}}) - \begin{cases} \lambda K_3 \epsilon^{p-1}, & \text{当 } n > p^2, \\ \lambda K_4 \epsilon^{\frac{n-p}{p}} |\ln \epsilon|, & \text{当 } n = p^2, \end{cases}$$

其中 K_3, K_4 为正常数. 因此, 当 $\lambda > 0$ 时, 取 ϵ 充分小, 由 (9.3.20) 可得

$$S_\lambda \le Q_\lambda(u_\epsilon) < S.$$

证完.

应用集中紧性原理，可将定理 8.3.2 从 $p = 2$ 推广到满足 $1 < p^2 \le n$ 的任意 p 而得出下面的定理.

定理 9.3.3 设 $1 < p^2 \le n$, λ_1 是由 (9.3.3) 定义的在 $W_0^{1,p}(\Omega)$ 上 p–Laplace 算子的第一个特征值. 那么，当 $0 < \lambda < \lambda_1$ 时，问题 (9.3.1) 在 $W_0^{1,p}(\Omega)$ 中至少有两个符号相反的非平凡弱解 $\pm u$, 且其中一个是非负的.

证 由 λ_1 的定义 (9.3.3) 有

$$\|Du\|_p^p \ge \lambda_1 \|u\|_p^p, \quad \forall\, u \in W_0^{1,p}(\Omega). \tag{9.3.24}$$

由 S 的定义 (9.3.17) 又有

$$\|Du\|_p^p \ge S \|u\|_{p^*}^p, \quad \forall\, u \in W_0^{1,p}(\Omega). \tag{9.3.25}$$

因此，当 $0 < \lambda < \lambda_1$ 时，由 $Q_\lambda(u)$ 的定义 (9.3.19) 得出

$$\begin{aligned} Q_\lambda(u) &= \frac{\lambda_1 - \lambda}{\lambda_1} \frac{\|Du\|_p^p}{\|u\|_{p^*}^p} + \frac{\lambda}{\lambda_1} \frac{\|Du\|_p^p - \lambda_1 \|u\|_p^p}{\|u\|_{p^*}^p} \\ &\ge \frac{\lambda_1 - \lambda}{\lambda} S > 0, \quad \forall\, u \in W_0^{1,p}(\Omega). \end{aligned} \tag{9.3.26}$$

于是数集

$$\{Q_\lambda(u) | u \in W_0^{1,p}(\Omega)\}$$

有下界. 根据 (9.3.20), 取极小化序列 $\{u_k\} \subset W_0^{1,p}(\Omega)$ 使得

$$\|u_k\|_{p^*} = 1, \; k = 1, 2, \cdots, \tag{9.3.27}$$

$$Q_\lambda(u_k)=||Du_k||_p^p-\lambda||u_k||_p^p\to S_\lambda,\quad 当\ k\to\infty. \tag{9.3.28}$$

由 (9.3.28) 知道，存在 $k_0>0$ 使得

$$Q_\lambda(u_k)=||Du_k||_p^p-\lambda||u_k||_p^p\le S_\lambda+1,\quad 当\ k\ge k_0. \tag{9.3.29}$$

由 (9.3.24) 及 (9.3.29) 得出

$$\begin{aligned}&(\lambda_1-\lambda)||Du_k||_p^p\\ =&\lambda_1(||Du_k||_p^p-\lambda||u_k||_p^p)-\lambda(||Du_k||_p^p-\lambda_1||u_k||_p^p)\\ \le&\lambda_1(||Du_k||_p^p-\lambda||u_k||_p^p)\le\lambda_1(S_\lambda+1),\quad 当\ k\ge k_0.\end{aligned}$$

由此式知道 $\{||Du_k||_p\}$ 是有界数列，即 $\{u_k\}$ 在 $W_0^{1,p}(\Omega)$ 中有界. 由嵌入定理 5.6.1 及定理 5.7.1 知道 $\{u_k\}$ 在 $L^{p^*}(\Omega)$ 中有界而在 $L^p(\Omega)$ 中为列紧的. 利用空间 $W_0^{1,p}(\Omega)$ 及 $L^{p^*}(\Omega)$ 中有界集的弱紧性 (参阅附录 3) 及附录 1 定理 9 得出：存在有界测度 μ,ν, 函数 $u\in W_0^{1,p}(\Omega)$ 及 $\{u_k\}$ 的子序列 (仍记此子序列为 $\{u_k\}$), 满足条件 (9.2.1) 及 (9.2.2). 因而由集中紧性原理 (定理 9.2.1), 存在最多可数的指标集 J, 不同点的集合 $\{x_j\}_{j\in J}\subset R^n$ 及 $\{\nu_j\}_{j\in J}\subset(0,\infty)$, 使得

$$\nu=|u|^{p^*}+\sum_{j\in J}\nu_j\delta_{x_j}, \tag{9.3.30}$$

$$\mu\ge|Du|^p+\sum_{j\in J}\mu_j\delta_{x_j},\quad \mu_j\ge S\nu_j^{\frac{p}{p^*}}. \tag{9.3.31}$$

由 (9.2.2) 知道

$$\int_{R^n}\phi|Du_k|^pdx\to\int_{R^n}\phi d\mu,\qquad \phi\in L^\infty(R^n)\bigcap C(R^n),$$

$$\int_{R^n}\phi|u_k|^{p^*}dx\to\int_{R^n}\phi d\nu,\qquad \phi\in L^\infty(R^n)\bigcap C(R^n).$$

在此两式中取 $\phi\equiv1$, 且由 (9.3.27) 得出

$$\int_{R^n}|Du_k|^pdx\to\int_{R^n}d\mu=\mu(R^n), \tag{9.3.32}$$

$$1 = \int_{R^n} |u_k|^{p^*} dx \to \int_{R^n} d\nu = \nu(R^n). \tag{9.3.33}$$

由 (9.3.28), (9.3.32), (9.2.1) 及 (9.3.31) 得出

$$\begin{aligned} S_\lambda &= \lim_{k\to\infty}(||Du_k||_p^p - \lambda||u_k||_p^p) = \mu(R^n) - \lambda||u||_p^p \\ &\geq \int_{R^n} |Du|^p dx + \sum_{j\in J} S\nu_j^{\frac{p}{p^*}} - \lambda||u||_{p^*}^p. \end{aligned} \tag{9.3.34}$$

由 (9.3.33) 及 (9.3.30) 有

$$1 = \nu(R^n) = \int_{R^n} |u|^{p^*} dx + \sum_{j\in J} \nu_j. \tag{9.3.35}$$

由 (9.2.1), (9.3.27), 利用 fatou 定理得出

$$||u||_{p^*}^{p^*} = \int_\Omega |u|^{p^*} dx \leq \underline{\lim}_{k\to\infty} \int_\Omega |u_k|^{p^*} dx = 1,$$

由此有

$$||u||_{p^*} \leq 1. \tag{9.3.36}$$

由 (9.3.25) 及 (9.3.27) 有

$$||Du_k||_p^p - \lambda||u_k||_p^p \geq S||u_k||_{p^*}^p - \lambda||u_k||_p^p = S - \lambda||u_k||_p^p.$$

在此式中令 $k\to\infty$ 取极限，由 (9.3.28) 及 (9.2.1) 得

$$S_\lambda \geq S - \lambda||u||_p^p.$$

由此式，根据引理 9.3.2 有

$$\lambda||u||_p^p \geq S - S_\lambda > 0.$$

因此 $||u||_p \neq 0$, 从而 $||u||_{p^*} \neq 0$. 今证 $||u||_{p^*} = 1$. 否则，假设 $||u||_{p^*} \neq 1$, 由 (9.3.36) 可设

$$||u||_{p^*}^{p^*} = \alpha \in (0,1). \tag{9.3.37}$$

以此式代入 (9.3.35) 得出

$$1=\alpha+\sum_{j\in J}\nu_j,$$

由此知

$$0<\sum_{j\in J}\nu_j=1-\alpha<1,\ 0<\nu_j<1,\quad \forall\, j\in J. \tag{9.3.38}$$

由 (9.3.34), $S_\lambda<S$ 及 $\frac{p}{p^*}<1$ 得出

$$\begin{aligned}||Du||_p^p-\lambda||u||_p^p &\le S_\lambda-S\sum_{j\in J}\nu_j^{p/p^*}<S_\lambda-S_\lambda\sum_{j\in J}\nu_j\\ &\le S_\lambda\left(1-\sum_{j\in J}\nu_j\right)^{\frac{p}{p^*}}=S_\lambda\alpha^{\frac{p}{p^*}}=S_\lambda||u||_{p^*}^p.\end{aligned}$$

此式与 S_λ 的定义 (9.3.20) 矛盾. 因而我们证明了 $||u||_{p^*}=1$. 以 $||u||_{p^*}=1$ 代入 (9.3.35) 得出 J 为空集. 因而 (9.3.34) 变为

$$S_\lambda\ge\int_\Omega|Du|^pdx-\lambda\int_\Omega|u|^pdx. \tag{9.3.39}$$

但由 S_λ 的定义 (9.3.20) 及 $||u||_{p^*}=1$ 有

$$S_\lambda\le\int_\Omega|Du|^pdx-\lambda\int_\Omega|u|^pdx,$$

从而得出

$$Q_\lambda(u)=S_\lambda=\min_{0\neq v\in W_0^{1,p}(\Omega)}Q_\lambda(v). \tag{9.3.40}$$

由此式知道: 对任意函数 $\phi\in W_0^{1,p}(\Omega)$ 有

$$\min_{t\in R}Q_\lambda(u+t\phi)=Q_\lambda(u+t\phi)|_{t=0}=Q_\lambda(u),$$

因而必须

$$\frac{d}{dt}Q_\lambda(u+t\phi)|_{t=0}=0.$$

以 Q_λ 的定义 (9.3.19) 代入上式, 经计算并利用 $\|u\|_{p^*}=1$ 及等式 (9.3.40) 得出

$$\int_\Omega |Du|^{p-2}Du\cdot D\phi dx-\lambda\int_\Omega |u|^{p-2}u\phi dx-S_\lambda\int_\Omega |u|^{p^*-2}u\phi dx=0. \tag{9.3.41}$$

由 (9.3.40) 及不等式 (9.3.26) 得出

$$S_\lambda=Q_\lambda(u)>0.$$

以 $u=S_\lambda^{-\frac{1}{p^*-p}}v$ 代入 (9.3.41) 化简后得

$$\int_\Omega |Dv|^{p-2}Dv\cdot D\phi dx-\lambda\int_\Omega |v|^{p-2}v\phi dx-\int_\Omega |v|^{p^*-2}v\phi dx=0,$$

$$\forall\ \phi\in W_0^{1,p}(\Omega). \tag{9.3.42}$$

此式说明 $v=S_\lambda^{\frac{1}{p^*-p}}u\in W_0^{1,p}(\Omega)$ 是问题 (9.3.1) 在空间 $\in W_0^{1,p}(\Omega)$ 中的弱解. 由于 $\|u\|_{p^*}=1$, v 为非平凡解. 由于 u 是满足 (9.3.40) 的函数, 因而以 $|u|$ 代替 u 后 (9.3.40) 仍成立. 因此 u 可以取为非负函数, 从而相应的 $v=S_\lambda^{\frac{1}{p^*-p}}u$ 也就是问题 (9.3.1) 的非负弱解. 再由 (9.3.42) 看出: 以 $(-v)$ 代替 v 后 (9.3.42) 仍然成立, 即 $(-v)$ 与 v 同时是问题 (9.3.1) 在 $W_0^{1,p}(\Omega)$ 中的非平凡弱解. 证完.

应用集中紧性原理, 朱熹平 [8] 将第八章中关于问题 (9.0.1) 当 $p=2$ 的一些结果推广到了问题 (9.0.1) 当 $2\le p<n$ 的情形, 建立了几个在 $W_0^{1,p}(\Omega)$ 中非平凡弱解的存在定理.

附录 1　测度与积分

本附录的内容可在任何一本关于测度与积分论的著作 (例如文献 [10] 及文献 [11]) 中找到. 这里给出本书用到的一般测度与积分的知识简介, 其中多数定理略去了它们的证明.

定义 1　R^n 中的一个子集族 $\sum$ 满足条件:

(i) $R^n \in \sum$;

(ii) 如果 $A \in \sum$, 则 A 的补集

$$A^c = R^n \backslash A = \{x \in R^n | x \notin A\} \in \sum;$$

(iii) 如果 $A_j \in \sum$, $j = 1, 2, \cdots$, 则 $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \sum$.

则称 $\sum$ 为一个 **σ 代数**.

由条件 (i)~(iii) 可推出:

(iv) 空集 $\varnothing \in \sum$;

(v) 如果 $A_j \in \sum$, $j = 1, 2, \cdots$, 则 $\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j \in \sum$;

(vi) 如果 $A, B \in \sum$, 则 $A \backslash B = A \bigcap B^c \in \sum$.

定义 2　设 μ 是 σ 代数 $\sum$ 上的一个函数, 函数值取在 $[0, +\infty]$ 中, 且 μ 是可数可加的, 即对 $\sum$ 中任意不相交的序列 $\{A_j\}$ 有

$$\mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j),$$

则称 μ 为 R^n 的 σ 代数 $\sum$ 上的**测度**.

由此定义推出:

(a) 如果 $A, B \in \sum$, $A \subset B$, 则 $\mu(A) \leq \mu(B)$;

(b) 如果 $A_j \in \sum$, $j = 1, 2, \cdots$, 且 $A_1 \subset A_2 \subset \cdots$, 则

$$\mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \lim_{j \to \infty} \mu(A_j).$$

定理 1 存在 R^n 的 σ 代数 $\sigma(R^n)$ 及 $\sigma(R^n)$ 上的测度 m, 它们具有下列性质:

(i) R^n 中每个开集属于 $\sigma(R^n)$.

(ii) 如果 $A \subset B$, $B \in \sigma(R^n)$, 且 $m(B)=0$, 则

$$A \in \sigma(R^n), \quad 且\ m(A)=0.$$

(iii) 如果 $A=\{x=(x_1,\cdots,x_n)|a_j \le x_j \le b_j,\ j=1,2,\cdots,n\}$, 则

$$A \in \sigma(R^n),\ 且\ m(A)=\prod_{j=1}^{n}(b_j-a_j).$$

(iv) m 是一个平移不变量, 即是说, 如果 $A \in \sigma(R^n)$, $x \in R^n$, 则

$$x+A=\{x+y|y \in A\} \in \sigma(R^n),\ 且\ m(x+A)=m(A).$$

在这个定理中, $\sigma(R^n)$ 中的元素叫做 R^n 中的 **Lebesgue 可测集**, 简称可测集; m 叫做 R^n 上的 **Lebesgue 测度**. 对于 $A \in \sigma(R^n)$, A 的 Lebesgue 测度 $m(A)$ 也叫做 A 的 **体积**, 也常以 meas A 或 $|A|$ 表示, 它是 R^3 中体积概念的自然推广.

定义 3 设 $A \subset R^n$. 如果函数 $f: A \to R\bigcup\{-\infty,+\infty\}$ 对一切实数 c, 集合 $\{x \in A|f(x)>c\}$ 都是可测的, 则称 f 为集合 A 上的可测函数.

定义 4 设 μ 是 $\sigma(R^n)$ 上的测度. 如果对所有有限区间

$$A=\{x=(x_1,\cdots,x_n)|a_i \le x_i \le b_i,\ i=1,\cdots,n\}$$

均有 $\mu(A)<\infty$, 则称 μ 为 R^n 上的 **Lebesgue-Stieltjes 测度**.

本书遇到的测度都是 Lebesgue-Stieltjes 测度, 并简称为测度.

定义 5 如果 $B \subset A \subset R^n$, 且 $\mu(B)=0$, 则在集合 $A\backslash B$ 的一切点上具有的性质 P 叫做该性质 P 在 A 中几乎处处成立, 记为

$$P \quad \text{a.e. 在 } A \text{ 中 } (\mu).$$

如果 μ 是 Lebesgue 测度，则称 **P 在 A 中几乎处处成立**，并简记为

$$P \quad \text{a.e. 在 } A \text{ 中}.$$

定理 2 (Lusin) 如果 f 是 R^n 上的可测函数，μ 是 R^n 上的测度，则对任意 $\delta > 0$，存在 R^n 上的连续函数 g 使得

$$\mu\{x \in R^n | g(x) \neq f(x)\} < \delta, \tag{1}$$

$$\sup_{x \in R^n} |g(x)| \leq \sup_{x \in R^n} |f(x)|. \tag{2}$$

注 在定理 2 中，如果 ν 也是 R^n 上的测度，则对任意 $\delta > 0$ 及 $\eta > 0$，存在同一函数 $g \in C(R^n)$ 使得 (1), (2) 及

$$\nu\{x \in R^n | g(x) \neq f(x)\} < \eta$$

均成立 (参阅文献 [10] 定理 4.3.16 的证明).

定义 6 设 $A \subset R^n$，由

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{当 } x \in A, \\ 0, & \text{当 } x \in R^n \backslash A \end{cases}$$

定义的函数 $\chi : R^n \to \{0, 1\}$ 叫做 A 上的 **特征函数**.

定义 7 设 $A \subset R^n$. 如果函数 $S : A \to R$ 的值域是有限个实数，则称 S 为 A 上的 **简单函数**.

对于 A 上的简单函数 S，存在有限个实数 $a_1, \cdots, a_m \in R$，使得

$$S(x) \in \{a_1, \cdots, a_m\}, \quad \forall\, x \in A.$$

此时有

$$S(x) = \sum_{j=1}^{m} a_j \chi_{A_j}(x), \quad A_j = \{x \in A | S(x) = a_j\},$$

且 S 是可测函数的充要条件是 $A_1, \cdots, A_m$ 都是可测的.

由于下面的逼近定理，简单函数在积分论中是一个非常有用的工具.

定理 3 设 $A \subset R^n$, 函数 $f: A \to R$. 那么，存在简单函数序列 $\{S_k(x)\}$ 使得对每一 $x \in A$ 有

$$S_k(x) \to f(x), \quad 当\ k \to \infty. \tag{3}$$

如果 f 是有界的, 则可选取简单函数列 $\{S_k\}$ 使得收敛 (3) 对 $x \in A$ 是一致的. 如果 f 是可测函数, 则每个 S_k 都可以选为可测函数. 如果 f 是非负的, 则可选到序列 $\{S_k\}$ 使得 $\{S_k(x)\}$ 对每点 $x \in A$ 是单调增加的.

定义 8 设 $A \subset R^n$, 且 A 是可测集， μ 是 R^n 上的一种测度. 对 A 上的实值可测函数，定义其积分如下:

(i) 对 A 上简单函数 $S = \sum_{j=1}^{n} a_j \chi_{A_j}$, $a_j \in R$, $A_j \subset A$, A_j 是可测的，则定义

$$\int_A S(x) d\mu = \sum_{j=1}^{m} a_j \mu(A_j). \tag{4}$$

(ii) 对 A 上的非负可测函数，定义

$$\int_A f(x) d\mu = \sup \int_a S(x) d\mu. \tag{5}$$

其中上确界是对 A 中满足 $0 \le S(x) \le f(x)$ 的可测简单函数 $S(x)$ 取的.

(iii) 对 A 上任意可测函数 f, 记 $f = f_1 - f_2$, 其中 $f_1 = \max(f, 0)$, $f_2 = -\min(f, 0)$ 都是非负可测函数. 如果下式右端至少有一个是有限的，则定义

$$\int_A f(x) d\mu = \int_A f_1(x) d\mu - \int_A f_2(x) d\mu. \tag{6}$$

当 μ 是 Lebesgue 测度时，通常记 $\int_A f(x) d\mu = \int_A f(x) dx$. 如果 (6) 式右端的两个积分都是有限的，则称 f 是 A 上的 **μ 可积函数** 或

f 在 A 上 μ **可积**，记为 $f \in L^1(A,\mu)$. 当 μ 是 Lebesgue 测度时，简称 μ 可积为可积，并简记 $L^1(A,\mu) = L^1(A)$.

(iv) 对 $p \geq 1$, 如果函数 $|u(x)|^p$ 在 A 上是 μ 可积的，则记为 $u \in L^p(A,\mu)$. $L^p(A,\mu)$ 关于范数

$$||u||_p = \left(\int_A |u(x)|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}$$

成为 Banach 空间. 当 μ 为 Lebesgue 测度时，简记 $L^p(A,\mu) = L^p(A)$.

注 1 对非负简单函数，由 (4) 及 (5) 给出的两个定义是一致的.

注 2 非负函数的积分可以是 $+\infty$.

由积分的上述定义可以推出下列一些性质:

(i) 如果 $f, g \in L^1(A,\mu)$, 则对任意实数 a, b 有 $(af + bg) \in L^1(A,\mu)$, 且

$$\int_A [af(x) + bg(x)]d\mu = a\int_A f(x)d\mu + b\int_A g(x)d\mu.$$

(ii) $f(x)$ 在 A 上是 μ 可积的充要条件是: $|f(x)|$ 在 A 上是 μ 可积的，且

$$\left|\int_A f(x)d\mu\right| \leq \int_A |f(x)|d\mu.$$

(iii) 如果 $f(x)$ 在 A 上是 μ 可积的，且

$$f(x) \geq 0, \quad \text{a.e. 在 } A \text{ 中}(\mu),$$

则有

(a) $\int_A f(x)dx \geq 0$;

(b) $\int_A f(x)dx = 0$ 的充要条件是

$$f(x) = 0, \quad \text{a.e. 在 } A \text{ 中}(\mu).$$

(iv) (积分的绝对连续性) 如果 $f \in L^1(A)$, 则对任意 $\epsilon > 0$, 存在 $\delta = \delta(\epsilon) > 0$, 使得

$$\left|\int_E f(x)dx\right| < \epsilon, \quad \text{当 } E \subset A \text{ 且 } m(E) < \delta.$$

定义 9 设 A 是 R^n 中的可测集, μ 是 R^n 上的测度, f 是 A 上的 μ 可测函数. 如果存在正常数 M 使得

$$f(x) \leq M, \quad \text{a.e. 在 } A \text{ 中}(\mu),$$

则称 f 在 A 上 **本质有上界**, 式中 M 的下确界叫做 f 在 A 上的 **本质上界**, 记为

$$\sup_A f = \text{ess sup}_A f = \inf\{M \in R | \mu\{x \in A | f(x) > M\} = 0\}.$$

如果 $|f(x)|$ 在 A 上本质有上界, 则称 f 为 **有界可测函数**, 记为 $f \in L^\infty(A, \mu)$. 如果在 $L^\infty(A, \mu)$ 中定义范数

$$||f||_\infty = \sup_A |f| = \text{ess sup}_A |f|,$$

则 $L^\infty(A, \mu)$ 是一个 Banach 空间. 当 μ 是 Lebesgue 测度时, 简记 $L^\infty(A, \mu) = L^\infty(A)$.

定理 4 设 μ 是 R^n 上的一个测度, $f \in L^1(R^n, \mu)$, 且 $f \geq 0$ a.e. 在 R^n 中 (μ), 则

$$\lambda(A) = \int_A f(x)d\mu$$

也是 R^n 上的测度, 且对任意 $\phi \in L^\infty(R^n, \mu)$ 有

$$\int_{R^n} \phi(x)f(x)dx = \int_{R^n} \phi d\lambda.$$

定义 10 设 μ 与 λ 都是 R^n 上的测度. 如果对一切可测集 $A \subset R^n$ 有

$$\mu(A) = 0, \quad \text{则} \quad \lambda(A) = 0,$$

则称 λ 关于 μ 是绝对连续的.

下面的定理是定理 4 的逆定理.

定理 5 (Radon-Nikodym) 设 λ 与 μ 都是 R^n 上的测度. 如果 λ 关于 μ 是绝对连续的, 则存在非负函数 $f \in L^1(R^n, \mu)$, 使得

$$\lambda(A) = \int_A f(x)d\mu, \quad \forall\ A \text{ 可测}.$$

下面三个定理涉及积分与极限过程的交换问题.

定理 6(单调收敛定理) 设 $A \subset R^n$, A 是可测集, $\{f_k\}$ 是 A 上 μ 可测函数序列, 满足

$$0 \leq f_1(x) \leq \cdots \leq f_k(x) \leq \cdots,\ \forall\ x \in A,$$

则有

$$\lim_{k\to\infty} \int_A f_k(x)d\mu = \int_A (\lim_{k\to\infty} f_k(x))d\mu.$$

定理 7(Fatou) 设 $A \subset R^n$, A 是可测集, $\{f_k\}$ 是 A 上的非负 μ 可测函数序列, 则

$$\int_A \underline{\lim}_{k\to\infty} f_k(x)d\mu \leq \underline{\lim}_{k\to\infty} \int_A f_k(x)d\mu.$$

定理 8(Lebesgue 控制收敛定理) 设 $\{f_k\}$ 是可测集 A 上的 μ 可测函数序列, 它在 A 上逐点收敛到一个极限函数. 如果存在 A 上的 μ 可积函数 g, 使得

$$|f_k(x)| \leq g(x), \quad \forall\ x \in A,\ k = 1, 2, \cdots,$$

那么

$$\lim_{k\to\infty} \int_A f_k(x)d\mu = \int_A (\lim_{k\to\infty} f_k(x))d\mu.$$

定义 11 如果函数 $F: R^n \to R$ 满足条件:

(i) F 是增函数: 如果 $a = (a_1, \cdots, a_n) \leq (b_1, \cdots, b_n) = b$ (即 $a_1 \leq b_1$, $a_2 \leq b_2$, $\cdots$, $a_n \leq b_n$), 则

$$F(a, b) = \Delta_{b_1 a_1} \Delta_{b_2 a_2} \cdots \Delta_{b_n a_n} F(x_1, \cdots, x_n) \geq 0,$$

其中差算子 $\Delta_{b_ia_i}$ 由下式定义:

$$\begin{aligned}&\Delta_{b_ia_i}G(x_1,\cdots,x_n)\\=&G(x_1,\cdots,x_{i-1},b_i,x_{i+1},\cdots,x_n)\\&-G(x_1,\cdots,x_{i-1},a_i,x_{i+1},\cdots,x_n).\end{aligned}$$

(ii) F 是右连续的: 如果 $x^1\geq x^2\geq\cdots\geq x^k\geq\cdots\to x$, 则

$$F(x^k)\to F(x),$$

那么, 称 F 为 R^n 上的分布函数.

引理 1 设 $S\subset R^n$, 函数序列 $\{u_k(x)\}$ 在 S 上一致有界, 即存在正常数 M 使得

$$|u_k(x)|\leq M,\quad 当\ x\in S,\ k=1,2,\cdots \tag{7}$$

则对 S 中的任意可数子集 $\{x^j\}$, $\{u_k(x)\}$ 有在所有 $x^j(j=1,2,\cdots)$ 上均收敛的子序列.

证 由条件 (7), $\{u_k(x^1)\}$ 是有界数列, 它有收敛的子数列, 即序列 $\{u_k(x)\}$ 有子序列

$$u_1^{(1)}(x),u_2^{(1)}(x),u_3^{(1)}(x),\cdots \tag{I}$$

在 $x=x^1$ 处收敛. 在序列 (I) 中取 $x=x^2$, 则由 (7) 得有界数列 $\{u_k^{(1)}(x^2)\}$, 它又有收敛的子数列, 即序列 (I) 有子序列

$$u_1^{(2)}(x),u_2^{(2)}(x),u_3^{(2)}(x),\cdots \tag{II}$$

在 $x=x^2$ 处收敛. 因为 (II) 是 (I) 的子序列, 而 (I) 在 $x=x^1$ 处收敛, 故 (II) 在 $x=x^1$ 处也收敛. 把 $x=x^3$ 代入 (II), 又得有界数列 $u_k^{(2)}(x^3)$, 因而 (II) 又有子序列

$$u_1^{(3)}(x),u_2^{(3)}(x),u_3^{(3)}(x),\cdots \tag{III}$$

它在 $x=x^1$, $x=x^2$, $x=x^3$ 处均收敛. 这样继续下去, 一般可以得到 $\{u_k(x)\}$ 的子序列

$$u_1^{(k)}(x),u_2^{(k)}(x),u_3^{(k)}(x),\cdots\quad(k=1,2,\cdots) \tag{k}$$

它在 $x=x^1, x=x^2, \cdots, x=x^k$ 处均收敛. 现在按对角线法则选取 $\{u_k(x)\}$ 的新的子序列 (即在 (I) 中取第一个函数, 在 (II) 中取第二个函数, 在 (III) 中取第三个函数, $\cdots\cdots$):

$$u^{(1)}(x)=u_1^{(1)}(x), u^{(2)}(x)=u_2^{(2)}(x), \cdots, u^{(k)}=u_k^{(k)}(x), \cdots \quad (*)$$

今证明此序列在所有 $x=x^k (k=1,2,\cdots)$ 上均收敛. 因为函数序列 (*) 从第 k 项起的所有函数组成的序列

$$u^{(k)}(x)=u_k^{(k)}(x), u^{(k+1)}(x)=u_{k+1}^{(k+1)}(x), \cdots \quad (**)$$

为序列 (k) 的子序列. 由序列 (k) 当 $x=x^k$ 时收敛得出序列 (**), 从而 (*) 当 $x=x^k$ 时收敛.

定理 9 在 $L^1(R^n)$ 中有界的非负函数序列必有弱收敛于某个有界测度的子序列.

证 设 $\{u_k\}\subset L^1(R^n)$ 满足

$$u_k(x)\geq 0, \quad \text{a.e. 在 } R^n \text{ 中}, \quad (8)$$

$$\int_{R^n} u_k(x)dx \leq C \text{ (常数)}, \ k=1,2,\cdots \quad (9)$$

今证 $\{u_k\}$ 必有弱收敛于某个测度 μ 的子序列. 由定理 4, 等式

$$\mu_k(A)=\int_A u_k(x)dx \quad (10)$$

定义了 R^n 上的一个测度, 且有

$$\int_{R^n}\phi(x)u_k(x)dx=\int_{R^n}\phi(x)d\mu_k, \quad \forall\, \phi\in L^\infty(R^n). \quad (11)$$

测度 μ_k 对应的分布函数为

$$F_k(x)=F_k(x_1,\cdots,x_n)=\mu_k(-\infty,x]$$

$$=\int_{-\infty}^x u_k(t)dt=\int_{-\infty}^{x_1}\cdots\int_{-\infty}^{x_n}u_k(t_1,\cdots,t_n)dt_1\cdots dt_n. \quad (12)$$

设 $A=\{r^j\}$ 为 R^n 中所有有理点 (坐标均为有理数的点) 的集合. 由 (12), (8) 及 (9) 有

$$0 \le F_k(x) \le \int_{R^n} u_k(x)dx \le C, \quad 当\ x \in R^n,\ k=1,2,\cdots. \tag{13}$$

因此, 由引理 1 知道: 序列 $\{F_k(x)\}$ 有在所有有理点 $r^j(j=1,2,\cdots)$ 上均收敛的子序列 $\{F^{(k)}(x)\}$. 因而在 R^n 的有理点集 $A=\{r^j\}$ 上定义了一个函数

$$\psi(r^j)=\lim_{k\to\infty} F^{(k)}(r^j),\ j=1,2,\cdots. \tag{14}$$

由 (8) 及 (12) 知道 $F^{(k)}(x)$ 为单调增函数, 再由 (14) 知道 ψ 为有理点集 $A=\{r^j\}$ 上的单调增函数. 对任意 $x\in R^n$, 命

$$\psi(x)=\inf_{r^j\in A, r^j>r} \psi(r^j), \tag{15}$$

则 $\psi(x)$ 在 R^n 上也是单调增函数, 且是右连续的, 即 ψ 为 R^n 上的分布函数. 今证对函数 ψ 的任意连续点 $x\in R^n$ 有

$$\lim_{k\to\infty} F^{(k)}(x)=\psi(x). \tag{16}$$

对任意 $\epsilon>0$, 由于 ψ 在 x 处连续, 必存在有理点 $r^j, r^l\in A$ 使得

$$r^j<x<r^l,\ |\psi(r^j)-\psi(x)|<\frac{\epsilon}{2},\ |\psi(r^l)-\psi(x)|<\frac{\epsilon}{2}.$$

对 r^j 与 r^l, 由 (14), 存在正整数 k_0 使得

$$|F^{(k)}(r^j)-\psi(r^j)|<\frac{\epsilon}{2},\ |F^{(k)}(r^l)-\psi(r^l)|<\frac{\epsilon}{2},\ 当\ k>k_0.$$

因此, 当 $k>k_0$ 时有

$$\psi(x)-\epsilon<F^{(k)}(r^j)\le F^{(k)}(x)\le F^{(k)}(r^l)<\psi(x)+\epsilon,$$

此即

$$|F^{(k)}(x)-\psi(x)|<\epsilon,\quad 当\ k>k_0.$$

这就证明了 (16) 对 ψ 的任意连续点均成立, 从而当 $k\to\infty$ 时

$$\begin{aligned} F^{(k)}(a,b] &= \Delta_{b_1a_1}\cdots\Delta_{b_na_n}F^{(k)}(x_1,\cdots,x_n) \\ &\to \Delta_{b_1a_1}\cdots\Delta_{b_na_n}\psi(x_1,\cdots,x_n)=\psi(a,b] \end{aligned} \tag{17}$$

对 ψ 的所有连续点 a,b 成立. 令

$$\mu(a,b]=\psi(a,b],$$

则由文献 [10] 定理 1.4.9, μ 可唯一地扩张成 R^n 上的 Lebesgue-Stieltjes 测度. 因 $\{F^{(k)}\}$ 为 $\{F_k\}$ 的子序列. 由 (12) 可设 $\{u^{(k)}\}$ 为 $\{u_k\}$ 的子序列, 使得

$$F^{(k)}(x)=\mu^{(k)}(-\infty,x]=\int_{-\infty}^{x}u^{(k)}(t)dt.$$

由 (10) 知 $F^{(k)}$ 对应的测度 $\mu^{(k)}$ 为

$$\mu^{(k)}(A)=\int_A u^{(k)}(x)dx,$$

且由 (11) 有

$$\int_{R^n}\phi(x)u^{(k)}(x)dx=\int_{R^n}\phi(x)d\mu^{(k)},\quad \forall\,\phi\in L^\infty(R^n). \tag{18}$$

由 (17), 根据文献 [10] 注 4.5.2 及定理 4.5.1 得出

$$\int_{R^n}\phi d\mu^{(k)}\to\int_{R^n}\phi d\mu,\quad \forall\phi\in L^\infty(R^n)\bigcap C(R^n). \tag{19}$$

由 (18) 及 (19) 有

$$\int_{R^n}\phi u^{(k)}dx\to\int_{R^n}\phi d\mu,\quad \forall\phi\in L^\infty(R^n)\bigcap C(R^n). \tag{20}$$

这就证明了 $\{u_k\}$ 有子序列 $\{u^{(k)}\}$, $\{u^{(k)}\}$ 弱收敛于测度 μ. 在 (20) 中取 $\phi\equiv 1$ 得出

$$\int_{R^n}u^{(k)}dx\to\int_{R^n}d\mu=\mu(R^n).$$

由于 $u^{(k)}$ 满足条件 (9), 故由上式得出 $\mu(R^n)\le C$, 即测度 μ 是有界的.

附录 2　$C(\overline{\Omega})$ 及 $L^p(\Omega)$ 中列紧性定理的证明

设 Ω 是 R^n 中的有界区域. 本附录给出 $C(\overline{\Omega})$ 中列紧性定理 2.1.1 及 $L^p(\Omega)$ 中列紧性定理 2.1.2 的证明.

定理 2.1.1 的证明　设 $\{u_k(x)\}$ 为 S 的任一子序列, 由条件 (i), 对常数 $K>0$ 有

$$|u_k(x)| \le K, \quad 当\ x \in \overline{\Omega},\ k = 1,2,\cdots. \tag{1}$$

以 $A=\{r_j\}$ 表示 $\overline{\Omega}$ 中所有有理点 (坐标为有理数的点) 的集合, 它是可数的. 根据附录 1 引理 1, 序列 $\{u_k(x)\}$ 有在所有有理点 $r_j(j=1,2,\cdots)$ 上均收敛的子序列 $\{u^{(k)}(x)\}$. 由条件 (ii), 对任意 $\epsilon>0$, 存在 $\delta=\delta(\epsilon)>0$ 使得对所有 $k=1,2,\cdots$ 有

$$|u^{(k)}(x)-u^{(k)}(y)|<\epsilon, \quad 当\ x,y\in\overline{\Omega},\ |x-y|<\delta. \tag{2}$$

因为有理点集 $A=\{r_j\}$ 在 $\overline{\Omega}$ 中稠密, 所以开球集 $\{B_\delta(r_j)|r_j\in A\}$ 覆盖 $\overline{\Omega}$, 而 $\overline{\Omega}$ 为有界闭集, 故 $\overline{\Omega}$ 为开球集 $\{B_\delta(r_j)|r_j\in A\}$ 中有限个开球

$$\mathcal{B}=\{B_\delta(r_1),\cdots,B_\delta(r_m)\}$$

所覆盖. 因为 $u^{(k)}(x)$ 在 $x=r_j(j=1,2,\cdots,m)$ 处收敛, 故存在正整数 N, 使得对 $j=1,2,\cdots,m$ 均有

$$|u^{(k)}(r_j)-u^{(l)}(r_j)|<\epsilon, \quad 当\ \ k,l>N. \tag{3}$$

对任意 $x\in\overline{\Omega}$, 由于 $\mathcal{B}$ 覆盖 $\overline{\Omega}$, 存在 $r_j\in A$ 使得 $x\in B_\delta(x_j)$, 即

$$|x-r_j|<\delta. \tag{4}$$

于是当 $k,l>N$ 时, 由 (4), (2), (3) 有

$$\begin{aligned}&|u^{(k)}(x)-u^{(l)}(x)|\\ &\le |u^{(k)}(x)-u^{(k)}(r_j)|+|u^{(k)}(r_j)-u^{(l)}(r_j)|+|u^{(l)}(r_j)-u^{(l)}(x)|\\ &<\epsilon+\epsilon+\epsilon.\end{aligned}$$

因此 $\{u^{(k)}(x)\}$ 在 $\overline{\Omega}$ 上一致收敛，从而序列 $\{u_k(x)\}$ 有子序列 $\{u^{(k)}(x)\}$ 在 $C(\overline{\Omega})$ 中收敛. 证完.

为了证明 $L^p(\Omega)$ 中的列紧性定理 2.1.2, 需要引进下列定义.

定义 设 A 与 B 都是度量空间 X 的子集, $\epsilon > 0$. 如果对任一点 $x \in A$ 都可找出一点 $y \in B$, 使得 $\rho(x, y) < \epsilon$, 则称 B 为 A 的 ϵ 网.

定理 1(Hausdorff) 设 X 是完备的度量空间, A 是 X 的子集. A 是 X 的列紧集的充要条件是：对任意正数 ϵ 都有 A 的有限 ϵ 网存在.

证 先证明条件是充分的. 设对任意正数 ϵ 都有 A 的有限 ϵ 网存在. 从而对每一个 $\epsilon_n = \dfrac{1}{n}$, 存在 A 的有限 ϵ_n 网

$$M_n = \{x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \cdots, x_{k_n}^{(n)}\}$$

使得

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{k_n} B_{\frac{1}{n}}(x_i^{(n)}), \ n = 1, 2, \cdots.$$

设 T 是 A 的一个无穷子集, 则由 $T \subset A \subset \bigcup\limits_{i=1}^{k_1} B_1(x_i^{(1)})$, 在 $B_1(x_1^{(1)})$, $\cdots$, $B_1(x_{k_1}^{(1)})$ 中至少有一个球含有 T 的无穷子集. 设 T 的无穷子集 $T_1 \subset B_1(x_1)$, 且 $x_1 \in \{x_1^{(1)}, \cdots, x_{k_1}^{(1)}\}$. 由于

$$T_1 \subset T \subset A \subset \bigcup_{i=1}^{k_2} B_{\frac{1}{2}}(x_i^{(2)}),$$

同理，存在无穷子集 $T_2 \subset T_1$ 使得

$$T_2 \subset B_{\frac{1}{2}}(x_2), \ x_2 \in \{x_1^{(2)}, \cdots, x_{k_2}^{(2)}\}.$$

照此类推，得到 T 的无穷个无穷子集

$$T \supset T_1 \supset T_2 \supset \cdots \supset T_n \supset T_{n+1} \supset \cdots$$

且存在 $x_n \in \{x_1^{(n)}, \cdots, x_{k_n}^{(n)}\}$ 使得

$$T_n \subset B_{\frac{1}{n}}(x_n), \ n = 1, 2, \cdots,$$

因而 T_n 中任意两点的距离小于 $\frac{2}{n}$. 依次取

$$t_1 \in T_1,\ t_2 \in T_2\backslash\{t_1\},\ \cdots,\ t_n \in T_n\backslash\{t_1,\cdots,t_{n-1}\},\cdots$$

得到序列 $\{t_n\} \subset T$. 对任意正整数 k 及 n 有

$$t_1 \in T_1,\ t_{n+k} \in T_{n+k} \subset T_n.$$

由此得出

$$\rho(t_n, t_{n+k}) < \frac{2}{n} \to 0, \quad 当\ n \to \infty,$$

即 $\{t_n\}$ 是 X 中的 Cauchy 序列. 因为 X 为完备的度量空间, 于是 $\{t_n\}$ 在 X 中收敛. 这就证明了 A 的任意无穷子集 T 都有收敛的子序列 $\{t_n\}$, 所以 A 是 X 的列紧集.

再证明条件是必要的. 用反证法. 假设对某个 $\epsilon_0 > 0$ 使得 A 没有有限 ϵ_0 网. 任取 $x_1 \in A$, 必存在 $x_2 \in A$ 使 $\rho(x_1, x_2) \geq \epsilon_0$. 否则 $\{x_1\}$ 就是 A 的有限 ϵ_0 网. 同时, 又必存在 $x_3 \in A$ 使 $\rho(x_i, x_3) \geq \epsilon_0, i = 1, 2$, 否则 $\{x_1, x_2\}$ 就是 A 的有限 ϵ_0 网. 这样继续下去, 对所有正整数 $n = 2, 3, \cdots$, 必存在 $x_n \in A$ 使 $\rho(x_m, x_n) \geq \epsilon_0$, $\forall\, m < n$. A 的这个子序列 $\{x_n\}$ 显然没有收敛的子序列. 因此 A 不是 X 的列紧集.

推论 设 A 是完备度量空间 X 的子集. 若对任意 $\epsilon > 0$ 都有 A 的列紧 ϵ 网存在, 则 A 是 X 的列紧集.

证 对任意 $\epsilon > 0$, 设 M 是 A 的一个列紧 $\frac{\epsilon}{2}$ 网, 由定理 1 知道 M 有有限 $\frac{\epsilon}{2}$ 网 C 存在. 今证 C 是 A 的有限 ϵ 网. 对任一点 $x \in A$, 必有 $y \in M$ 存在, 使得

$$\rho(x, y) < \frac{\epsilon}{2}.$$

对 $y \in M$, 又有 $z \in C$ 存在, 使得

$$\rho(y, z) < \frac{\epsilon}{2}.$$

因而对任一点 $x \in A$, 在 C 中存在点 z 使得

$$\rho(x,z) \le \rho(x,y) + \rho(y,z) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon,$$

即 C 是 A 的有限 ϵ 网.

定理 2(Kolmogorov) 设 Ω 是 R^n 中的有界区域，$1 \le p < \infty$. 如果 $S \subset L^p(\Omega)$ 满足下列条件，那么，S 是 $L^p(\Omega)$ 中的列紧集:

(i) S 有界，即存在常数 $K > 0$ 使得

$$||u||_p \le K, \quad \forall\, u \in S, \tag{5}$$

(ii) S 中的函数 u 的平均函数一致收敛于 u, 即对任意正数 $\epsilon > 0$, 存在 $h_0 = h_0(\epsilon) > 0$, h_0 与 u 无关，使得

$$||u_h - u||_p < \epsilon, \quad 当\ u \in S,\ 0 < h < h_0, \tag{6}$$

其中 u_h 由 (5.2.2) 定义，且在 Ω 外视 $u = 0$.

证 任意取定 $h > 0$, 由 (5.2.2), 函数 u 的平均函数为

$$u_h(x) = \int_{R^n} \rho_h(x-y)u(y)dy. \tag{7}$$

先证明由下式定义的集合 S_h 是 $C(\overline{\Omega})$ 中的列紧集:

$$S_h = \{u_h | u \in S\} \subset C(\overline{\Omega}). \tag{8}$$

由 (7), (5) 及 (5.2.1) 有

$$|u_h(x)| \le ||\rho_h||_{p'} ||u||_p \le C_h K, \quad 当\ u \in S,\ x \in \overline{\Omega},$$

其中 C_h 是只与 h 有关的常数. 因此，S_h 是一致有界的. 由 $\rho_h \in C_0^\infty(R^n)$ 知 ρ_h 在 R^n 中是一致连续的. 对任意 $\epsilon > 0$, 存在 $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ 使得

$$|\rho_h(x) - \rho_h(z)| < \frac{\epsilon}{|\Omega|^{1-\frac{1}{p}} K}, \quad 当\ |x - z| < \delta. \tag{9}$$

由 (7), (9), (5.1.8), (5) 知道：当 $|x-z|<\delta$ 时有

$$|u_h(x)-u_h(z)| \le \int_{R^n} |\rho_h(x-y)-\rho_h(z-y)|\ |u(y)|dy$$

$$< \int_{R^n} \frac{\epsilon}{|\Omega|^{1-\frac{1}{p}}K}|u(y)|dy \le \frac{\epsilon}{|\Omega|^{1-\frac{1}{p}}K}|\Omega|^{1-\frac{1}{p}}||u||_p = \epsilon,$$

$$\forall\ u \in S$$

即 S_h 是等度连续的. 由定理 2.1.1 知 S_h 在 $C(\overline{\Omega})$ 中是列紧的. 因此，由 Ω 是有界区域易知 S_h 在 $L^p(\Omega)$ 中也是列紧的. 由条件 (ii), 任取 $\epsilon>0$, 存在 $h_0=h_0(\epsilon)>0$ 使得

$$||u_h-u||_p<\epsilon, \quad 当\ u\in S,\ 0<h<h_0,$$

即 S_h 为 S 的列紧 ϵ 网. 由定理 1 的推论知道 S 是列紧的.

定理 2.1.2 的证明 只需证明由 (8) 定义的 S_h 满足定理 2 的条件 (ii). 由本定理的条件 (ii), 对任意 $\epsilon>0$, 存在 $h_0=h_0(\epsilon)>0$ 使得

$$||u(x+h)-u(x)||_p<\epsilon, \quad 当\ |h|<h_0,\ u\in S. \tag{10}$$

由 (7), 利用 Holder 不等式后，再经变数代换 $y=x+z$ 得出

$$|u_h(x)-u(x)| = \left|\int_{R^n} \rho_h(x-y)\right| u(y)-u(x)|dy|$$

$$\le \left(\int_{R^n} \rho(x-y)dy\right)^{\frac{1}{p'}} \left(\int_{R^n} \rho_h(x-y)|u(y)-u(x)|^p dy\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$= \left(\int_{R^n} \rho_h(x-y)|u(y)-u(x)|^p dy\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$= \left(\int_{R^n} \rho_h(z)|u(x+z)-u(x)|^p dz\right)^{\frac{1}{p}}.$$

由此式及 (10) 得出

$$\begin{aligned}
&\int_{R^n} |u_h(x) - u(x)|^p dx \\
&\leq \int_{R^n} \int_{R^n} \rho_h(z)|u(x+z) - u(x)|^p dz dx \\
&= \int_{R^n} \rho_h(z) dz \int_{R^n} |u(x+z) - u(x)|^p dx \\
&< \epsilon^p \int_{R^n} \rho_h(z) dz \\
&= \epsilon^p, \quad \text{当 } |h| < h_0,\ u \in S.
\end{aligned}$$

由此得出

$$||u_h - u||_p < \epsilon, \quad \text{当 } u \in S, |h| < h_0,$$

即定理 2 的条件 (ii) 成立. 故由定理 2 得证.

附录 3　弱收敛与弱紧性

定义 1　设 E 是 Banach 空间，序列 $\{x_k\} \subset E$, $x \in E$. 如果对于 E 的对偶空间 E' 有

$$f(x_k) \to f(x)\ (\text{当 } k \to \infty),\quad \forall\, f \in E',$$

则称 x_k 在 E 中弱收敛于 x, 记为

$$x_k \rightharpoonup x,\ \text{在 } E \text{ 中}. \tag{1}$$

引理 1　Banach 空间中的弱收敛序列 $\{x_k\}$ 是有界的，即

$$\sup_k \|u_k\|_p < \infty. \tag{2}$$

证明参阅文献 [17] 第五章 §1 定理 1.

定理 1(Hahn-Banach 延拓定理)　设 M 是 Banach 空间 X 的子空间. 如果 $m' \in M'$, 则存在 $x' \in X'$ 使得

$$\langle x', m\rangle = \langle m', m\rangle,\quad \forall\, m \in M,\ \|x'\|_{X'} = \|m'\|_{M'}.$$

证明参阅文献 [17] 第四章 §5 定理 1.

设 X 是 Banach 空间. 对任意 $x \in X$, 等式

$$\langle x'', x'\rangle = \langle x', x\rangle = x'(x),\quad \forall\, x' \in X' \tag{3}$$

定义了 X' 上的一个线性泛函 x''. 由于

$$|\langle x'', x'\rangle| \le \|x\|_X \|x'\|_{X'}, \tag{4}$$

因而 x'' 是 X' 上的线性有界泛函，即 $x'' \in (X')'$. 记

$$(X')' = X'',\ X_0 = \{x'' | x'' \text{由(3)定义},\ x \in X\},$$

则 $X_0 \subset X''$, 且映射

$$J:\quad x \to x'' = Jx$$

是 $X \to X_0$ 的等距同构. 因为由 (4) 有

$$\|x''\|_{X''} \le \|x\|_X, \tag{5}$$

而对任何 $x \in X, x \neq 0$, 在 X 的一维子空间 $M = \{\lambda x | \lambda \in R\}$ 上由下式定义的线性有界泛函 $m' \in M'$, 有

$$\|m'\|_{M'} = 1$$

$$\langle m', \lambda x\rangle = \lambda \|x\|_X,\ \lambda \in R.$$

由 Hahn-Banach 延拓定理, 存在 $x' \in X'$ 使得

$$\langle x', \lambda x\rangle = \langle m', \lambda x\rangle = \lambda\|x\|_X,\ \lambda \in R,$$

$$\|x'\|_{X'} = \|m'\|_{M'} = 1,$$

从而由 (3) 得

$$\|x\|_X = \langle x', x\rangle = \langle x'', x'\rangle \le \|x''\|_{X''}\|x'\|_{X'} = \|x''\|_{X''}. \tag{6}$$

由 (5) 及 (6) 得

$$\|Jx\|_{X''} = \|x''\|_{X''} = \|x\|_X.$$

从而 J 是 X 到 X_0 的一个等距同构, 可视为 $X = X_0$, 即可以把 X 看成 X'' 的子空间: $X \subset X''$.

定义 2 $X'' = (X')'$ 称为 X 的 **二次对偶空间**. 如果 $X_0 = X''$(即可视为 $X = X''$), 则称 E 为 **自反空间**(或 **正则空间**).

引理 2 空间 $L^p(\Omega)$ 是自反空间的充要条件是 $1 < p < \infty$.

证明参阅文献 [9] 定理 2.35.

引理 3 设 M 是 Banach 空间 E 的真闭子空间. 如果 $x_0 \in E \backslash M$, 则存在 $x' \in E'$ 使得

$$||x'||_{X'} = 1, \ \langle x', x_0 \rangle = \text{dist}(x_0, M),$$

$$\langle x', m \rangle = 0, \quad \forall m \in M.$$

证 记 $d = \text{dist}(x_0, M)$, $S = \text{span}\{x_0, M\}$ 为由形如

$$s = \lambda x_0 + m \ (\lambda \in R, \ m \in M) \tag{7}$$

的所有元素组成的 (E 的) 子空间. 由于 S 中的元素表法 (7) 是唯一的, 由等式

$$\langle s', s \rangle = \langle s', \lambda x_0 + m \rangle = \lambda d \tag{8}$$

定义了一个 S 上的线性泛函 s'. 因为 M 是 E 的线性子空间, 当 $\lambda \neq 0, m \in M$ 时有 $-\dfrac{m}{\lambda} \in M$. 因此, 对元素 (7) 当 $\lambda \neq 0$ 时有

$$|\langle s', s \rangle| = |\lambda| d = |\lambda| \inf_{y \in M} ||x_0 - y||$$

$$\leq |\lambda| \left\| x_0 - \left(-\frac{m}{\lambda} \right) \right\| = ||\lambda x_0 + m|| = ||s||.$$

而当 $\lambda = 0$ 时, 对元素 (7) 有

$$|\langle s', s \rangle| = |\lambda| d = 0 \leq ||s||.$$

这就证明了 s' 是 S 上的线性有界算子, 即 $s' \in S'$, 且

$$||s'|| \leq 1. \tag{9}$$

因为 M 为闭子空间, 故对 $d = \text{dist}(x_0, M)$ 存在元素 $m_0 \in M$ 使得 $d = ||x_0 - m_0||$, 从而对 S 中的元素 $s_0 = x_0 - m_0$, 由 (8) 得出

$$\langle s', s_0 \rangle = \langle s', x_0 - m_0 \rangle = d = ||x_0 - m_0|| = ||s_0||. \tag{10}$$

由 (9) 与 (10) 得出 $||s'|| = 1$. 再利用 Hahn-Banach 延拓定理, 存在 $x' \in E'$ 使得

$$\langle x', s \rangle = \langle s', s \rangle, \quad \forall \ s \in S, \ ||x'|| = ||s'|| = 1.$$

由此，根据 (8) 得出

$$\langle x', x_0 \rangle = \langle s', x_0 \rangle = d = \mathrm{dist}(x_0, M),$$

$$\langle x', m \rangle = \langle s', m \rangle = 0, \quad \forall\, m \in M.$$

引理 4 自反 Banach 空间的闭子空间也是自反的.

证 设 M 是 Banach 空间 E 的闭子空间. 对每一个 $x' \in E'$, 令 x'_M 为 x' 在 M 上的限制，即

$$\langle x'_M, m \rangle = \langle x', m \rangle, \quad \forall\, m \in M. \tag{11}$$

由上式得出

$$|\langle x'_M, m \rangle| = |\langle x', m \rangle| \leq ||x'||\ ||m||, \quad \forall m \in M.$$

因此有

$$||x'_M|| \leq ||x'||.$$

任取 $m''_0 \in M''$, 由等式

$$\langle x''_0, x' \rangle = \langle m''_0, x'_M \rangle, \quad \forall\, x' \in E' \tag{12}$$

定义了 E' 上的一个线性泛函，由于

$$|\langle x''_0, x' \rangle| = ||m''_0||\ ||x'_M|| \leq ||m''_0||\ ||x'||,$$

因此 x''_0 是 E' 上的线性有界泛函，即 $x''_0 \in E''$. 根据假设，E 为自反空间，所以存在 $x_0 \in E$ 使得

$$\langle x''_0, x' \rangle = \langle x', x_0 \rangle, \quad \forall\, x' \in E'. \tag{13}$$

今证 $x_0 \in M$. 否则，如果 $x_0 \in E \backslash M$, 由引理 3, 存在 $x' \in E'$ 使得

$$\langle x', x_0 \rangle = \mathrm{dist}(x_0, M) > 0, \tag{14}$$

$$\langle x', m \rangle = 0, \quad \forall\, m \in M. \tag{15}$$

由 (15) 知 $x'_M = 0$. 从而由 (13) 及 (12) 得出

$$\langle x', x_0 \rangle = \langle x''_0, x' \rangle = \langle m''_0, x'_M \rangle = \langle m''_0, 0 \rangle = 0.$$

此式与 (14) 矛盾. 这就证明了：对每一 $m''_0 \in M''$, 存在 $x_0 \in M$ 使得 (13) 对任意 $x' \in E'$ 均成立. 对任意 $m' \in M'$, 由 Hahn-Banach 延拓定理，存在 $x' \in E'$, 使得 $m' = x'_M$ 满足 (11). 因此，由 (11)~(13), 对任意 $m' \in M'$ 有

$$\begin{aligned} \langle m''_0, m' \rangle &= \langle m''_0, x'_M \rangle = \langle x''_0, x' \rangle \\ &= \langle x', x_0 \rangle = \langle x'_M, x_0 \rangle = \langle m', x_0 \rangle. \end{aligned}$$

这样一来，映射 $j : x_0 \to m''_0$ 是 $M \to M''$ 的一一对应，因而 M 是自反空间.

定理 2 当 $1 < p < \infty$ 时， Sobolev 空间 $W_0^{1,p}(\Omega)$ 是自反可分空间.

证 因为当 $1 < p < \infty$ 时， $Lp(\Omega)$ 是自反可分 Banach 空间，从而笛卡尔乘积空间

$$L_n^p = L^p(\Omega) \times L^p(\Omega) \times \cdots \times L^p(\Omega)$$

在范数

$$||u||_{L_n^p} = \left(\sum_{i=1}^n ||u_i||_p^p \right)^{\frac{1}{p}}, \ u = (u_1, \cdots, u_n) \in L_n^p$$

下也是自反可分 Banach 空间. 空间

$$M = \{(D_1 u, \cdots, D_n u) | u \in W_0^{1,p}(\Omega)\}$$

是 L_n^p 的闭子空间. 由定理 2.1.3 及引理 4 知道： M 也是可分自反 Banach 空间. 由于映射

$$P: \ u \to (D_1 u, \cdots, D_n u)$$

是 $W_0^{1,p}(\Omega)$ 到 M 的等距同构，即有

$$\|u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} = \|Pu\|_{L_n^p},$$

因而空间 $W_0^{1,p}(\Omega)$ 也是自反可分 Banach 空间.

定义 3 设 S 是 Banach 空间的一个子集. 如果 S 的每一个无穷子集都有在 E 中弱收敛的子序列，则称集合 S 是 **弱紧** 的.

引理 5 设 E 是 Banach 空间. 如果 E 的对偶空间 E' 是可分的，则 E 也是可分的.

证 设 E' 是可分的. 由定理 2.1.4, 度量空间

$$B_1 = \{x' \in E' |\ \|x'\| = 1\}$$

也是可分的. 设 $\{x_k'\} \subset B_1$, 序列 $\{x_k'\}$ 在 B_1 中稠密. 对每个 $k(k = 1, \cdots)$, 由于 $x_k' \in B_1$, 由范数定义有

$$1 = \|x_k'\| = \sup_{x \in E, \|x\| = 1} |\langle x_k', x\rangle|,$$

因而存在 $x_k \in E$, 使得

$$\|x_k\| = 1,\ \langle x_k', x_k\rangle > \frac{1}{2}. \tag{16}$$

设 $M = \text{span}\{x_1, x_2, \cdots\}$ 是由序列 $\{x_k\}$ 中所有元素生成的闭子空间. 今证 $E = M$, 从而 E 是可分的. 相反，设 $M \neq E$, 则存在 $x_0 \in E \backslash M$, 由引理 3, 存在 $x' \in E'$ 使得

$$\|x'\| = 1,\ \langle x', x_0\rangle = \text{dist}(x_0, M) > 0, \tag{17}$$

$$\langle x', m\rangle = 0, \quad \forall\ m \in M. \tag{18}$$

由 (16) 与 (18) 得出：对所有 $k(k = 1, 2, \cdots)$ 有

$$\frac{1}{2} < \langle x_k', x_k\rangle = \langle x_k', x_k\rangle - \langle x', x_k\rangle$$

$$\leq \langle x_k' - x', x_k\rangle \leq \|x_k' - x'\|\ \|x_k\| = \|x_k' - x'\|.$$

由 (17) 有 $x' \in B_1$. 因而上式与序列 $\{x_k'\}$ 在 B_1 中稠密是矛盾的.

定理 3 自反可分 Banach 空间中的有界子集是弱紧的.

证 设 E 是自反可分 Banach 空间. 由 $(E')' = E$ 是可分的, 根据引理 5 知道 E' 也是可分的. 设 $\{x_k'\} \subset E'$, 序列 $\{x_k'\}$ 在 E' 中稠密. 再设 S 是 E 的有界子集, 即存在常数 $K > 0$, 使得

$$||x|| \leq K, \quad \forall\, x \in S.$$

于是对 S 的任一无穷子集 S_1 有

$$|\langle x_1', x\rangle| \leq ||x_1'||\, ||x|| \leq K||x_1'||, \quad \forall\, x \in S_1,$$

即数集 $\{\langle x_1', x\rangle | x \in S_1\}$ 是有界的. 故存在序列 $\{x_{1k}\} \subset S_1$ 使得数列 $\{\langle x_1', x_{1k}\rangle\}$ 收敛. 同理, 由数列 $\{\langle x_2', x_{1k}\rangle\}$ 有界, 又存在序列 $\{x_{2k}\} \subset \{x_{1k}\}$ 使得数列 $\{\langle x_2', x_{2k}\rangle\}$ 收敛. 这样继续下去, 可以得到无穷多个 S_1 的子序列

$$\begin{array}{llll} x_{11}, & x_{12}, & x_{13}, & \cdots \\ x_{21}, & x_{22}, & x_{23}, & \cdots \\ x_{31}, & x_{32}, & x_{33}, & \cdots \\ \multicolumn{4}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots} \end{array} \tag{19}$$

及相应的无穷多个收敛数列

$$\begin{array}{llll} \langle x_1', x_{11}\rangle, & \langle x_1', x_{12}\rangle, & \langle x_1', x_{13}\rangle, & \cdots \\ \langle x_2', x_{21}\rangle, & \langle x_2', x_{22}\rangle, & \langle x_2', x_{23}\rangle, & \cdots \\ \langle x_3', x_{31}\rangle, & \langle x_3', x_{32}\rangle, & \langle x_3', x_{33}\rangle, & \cdots \\ \multicolumn{4}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots} \end{array} \tag{20}$$

在 (19) 中每一个序列是它的前一个序列的子序列. 今在 (19) 中取对角元素 x_{kk}, 并记 $x_k = x_{kk} (k = 1, 2, \cdots)$, 则 $\{x_k\}$ 是 S_1 的子序列, 且对任意 $l (l = 1, 2, \cdots)$, 序列

$$x_l,\ x_{l+1},\ x_{l+2},\ \cdots$$

是序列

$$x_{ll},\ x_{l,l+1},\ x_{l,l+2},\ \cdots$$

的子序列. 由 (20) 中数列的收敛性得出数列

$$\langle x_l', x_l\rangle,\ \langle x_l', x_{l+1}\rangle,\ \langle x_l', x_{l+2}\rangle,\ \cdots$$

是收敛的, 即

$$\lim_{k\to\infty}\langle x_l', x_k\rangle \text{ 存在},\ l=1,2,\cdots. \tag{21}$$

今证明

$$\lim_{k\to\infty}\langle x', x_k\rangle \text{ 存在}, \quad \forall\, x'\in E'. \tag{22}$$

设 ϵ 是任意正数. 由于 $\{x_k'\}$ 在 E' 中稠密, 对 $x'\in E'$, 存在 $x_l'\in\{x_k'\}$ 使得

$$\|x_l' - x'\| < \frac{\epsilon}{3K}.$$

由 (21), 对 x_l', 存在正整数 $l_0 = l_0(\epsilon)$ 使得

$$|\langle x_l', x_k\rangle - \langle x_l', x_j\rangle| < \frac{\epsilon}{3}, \quad \text{当 } k > l_0,\ j > l_0.$$

于是有

$$\begin{aligned}
&|\langle x', x_k\rangle - \langle x', x_j\rangle|\\
\le\ &|\langle x', x_k\rangle - \langle x_l', x_k\rangle| + |\langle x_l', x_k\rangle - \langle x_l', x_j\rangle| + |\langle x_l', x_j\rangle - \langle x', x_j\rangle|\\
<\ &\|x' - x_l'\|\,\|x_k\| + \frac{\epsilon}{3} + \|x_l' - x'\|\,\|x_j\|\\
<\ &\frac{\epsilon}{3K}\cdot K + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3K}\cdot K = \epsilon, \quad \text{当 } k > l_0,\ j > l_0,
\end{aligned}$$

即 (22) 成立. 因此, 等式

$$\langle x_0'', x'\rangle = \lim_{k\to\infty}\langle x', x_k\rangle, \quad \forall\, x'\in E' \tag{23}$$

定义了一个 E' 上的线性有界泛函，即存在 $x_0'' \in E''$ 满足 (23). 因为 E 是自反空间，对 $x_0'' \in E''$, 必存在 $x_0 \in E$, 使得

$$\langle x_0'', x' \rangle = \langle x', x_0 \rangle, \quad \forall\, x' \in E'. \tag{24}$$

由 (23) 及 (24) 得出

$$\lim_{k\to\infty} \langle x', x_k \rangle = \langle x', x_0 \rangle, \quad \forall\, x' \in E'.$$

此式表明 $x_k \rightharpoonup x_0$ 在 E 中. 这就证明了有界集 S 的任意无穷子集 S_1 有弱收敛的子序列 $\{x_k\}$, 即自反可分 Banach 空间 E 的任意有界子集 S 是弱紧的. 证完.

当 $1 < p < \infty$ 时，$L^p(\Omega)$ 是自反可分 Banach 空间，因而有

推论 1 当 $1 < p < \infty$ 时，$L^p(\Omega)$ 中的有界集是弱紧的.

结合定理 2 及定理 3 可得

推论 2 当 $1 < p < \infty$ 时，$W_0^{1,p}(\Omega)$ 中的有界集是弱紧的.

附录 4　仿紧空间

仿紧性是拓扑学中的一个重要概念，在一般拓扑学书中都能找到.

定义 1　设 $\mathcal{F}$ 是集合 X 的一个子集族. 如果满足条件:

(i) $X \in \mathcal{F}$, 空集 $\varnothing \in \mathcal{F}$;

(ii) 若 $A, B \in \mathcal{F}$, 则 $A \bigcap B \in \mathcal{F}$;

(iii) 若 $\mathcal{A} \subset \mathcal{F}$, 则 $\bigcup_{A \in \mathcal{F}} A \in \mathcal{F}$.

则称 $\mathcal{F}$ 是 X 上的一个拓扑. $(X, \mathcal{F})$ 称为拓扑空间，也简记为 X. $\mathcal{F}$ 的每个集合称为 X 中的开集.

例　在度量空间 (X, ρ) 中，对 $x_0 \in X$, $r > 0$, 集合

$$B_r(x_0) = \{x_0) = \{x \in X | \rho(x, x_0) < r\}$$

叫做以 x_0 为心，r 为半径的开球. 设 $S \subset X$, 如果对每个 $x_0 \in S$, S 都含有一个以 x_0 为心的开球，则称 S 为 X 的开集. 这种开集的全体构成 X 的一个拓扑. 因此，度量空间都是拓扑空间.

定义 2　设 X 是一个拓扑空间. 如果 X 的每一个开覆盖都有加细的局部有限开覆盖，即对于 X 的任意开覆盖 $\mathcal{U}$, 存在 X 的开覆盖 $\mathcal{V}$, 具有下列性质，则称 X 具有 **仿紧性** 或 X 是 **仿紧** 的:

1° $\mathcal{V}$ 是 $\mathcal{U}$ 的加细，即对任意开集 $V \in \mathcal{V}$, 存在开集 $U \in \mathcal{U}$ 使得 $V \subset U$.

2° $\mathcal{V}$ 是局部有限的，即对任意 $x \in X$, 存在 x 的邻域 $N(x)$, $N(x)$ 只与 $\mathcal{V}$ 中有限个开集相交.

定理　度量空间是仿紧的.

这个定理是 Stone A. H. (Bull. Amer. Math. Soc., 54, 1948, 960~977) 得到的. 因为本书用于研究微分方程边值问题的基本空间 $W_0^{1,p}(\Omega)(1 < p < \infty)$ 是可分的，因此在这个定理的证明中不妨假设空间是可分的.

证 设 X 是一个度量空间. 加上“ X 是可分的”假设. 再设 $\mathcal{U}$ 是 X 的一个开覆盖. 将 $\mathcal{U}$ 中每一个开集 U 换为覆盖 U 的开球族

$$\{B_{\mathrm{dist}(x,X\backslash U)}(x)|x\in U\},$$

则得出 $\mathcal{U}$ 的加细开球覆盖

$$\mathcal{B}=\{B_{\mathrm{dist}(x,X\backslash U)}(x)|x\in U,\ U\in\mathcal{U}\}.$$

如果“ X 是可分的”. 设 $Y=\{y_i\}$ 是 X 的可数稠密子集. 记 $R_0=\{r_i\}$ 为所有正有理数组成的可数集. 对每一 $x\in X$, 存在开球 $B(x)\in\mathcal{B}$ 使得 $x\in B(x)$. 由于 $Y=\{y_i\}$ 在 X 中稠密, 对满足

$$r_j=r_j(x)<\frac{1}{2}\mathrm{dist}(x,X\backslash B(x))$$

的一个 $r_j\in R_0$, 必存在 $y_i=y_i(x)\in Y$ 使得

$$\rho(y_i,x)<r_j=r_j(x),$$

从而有 $x\in B_{r_j}(y_i)\subset B(x)$. 于是我们得到 X 的由可数个球

$$\mathcal{B}_0=\{B_{r_j}(y_i)|r_j\in R_0,y_i\in Y\}=\{B_{r_k}(y_i)\}=\{B_k\}$$

组成的 $\mathcal{U}$ 加细开覆盖. 令

$$V_1=B_1,\ V_k=B_k\backslash\bigcup_{j=1}^{k-1}\overline{B_{r_j-\frac{1}{k}}(y_j)}\quad(k=2,3,\cdots),$$

则 $V_k\subset B_k$. 因而 $\mathcal{V}=\{V_k\}$ 是 $\mathcal{U}$ 的加细.

现证明 $\mathcal{V}=\{V_k\}$ 是 X 的覆盖. 任取 $x\in X$, 命

$$k=\min\{j|x\in B_j\},$$

则有

$$x\in B_k,\ x\notin B_j,\ (j=1,2,\cdots,k-1).$$

因为

$$\overline{B_{r_j-\frac{1}{k}}(x_j)} \subset B_{r_j}(x_j) = B_j, \quad \forall\, j,k,$$

所以有

$$x \in B_k,\ x \notin \overline{B_{r_j-\frac{1}{k}}(x_j)}\ (j=1,2,\cdots,k-1),$$

这就证明了 $x \in V_k$.

再证明 $\mathcal{V} = \{V_k\}$ 是局部有限的. 对于任意 $x \in X$, 存在 $B_j \in \mathcal{B}_0$ 使得

$$x \in B_j = B_{r_j}(y_j).$$

令 $\epsilon = \dfrac{1}{2}\mathrm{dist}(x, X\backslash B_j)$, 则当 $k \geq \dfrac{1}{\epsilon}$ 时有

$$B_\epsilon(x) \subset B_{r_j-\frac{1}{k}}(y_j).$$

于是当 $k \geq \max(\frac{1}{\epsilon}, j+1)$ 时有

$$B_\epsilon(x) \subset B_{r_j-\frac{1}{k}}(y_j) \subset \overline{B_{r_j-\frac{1}{k}}(y_j)} \subset \bigcup_{j=1}^{k-1} \overline{B_{r_j-\frac{1}{k}}(y_j)}.$$

从而有

$$V_k = B_k\backslash \subset \bigcup_{j=1}^{k-1} \overline{B_{r_j-\frac{1}{k}}(y_j)} \subset B_k\backslash B_\epsilon(x).$$

因此, 当 $k \geq \max(\frac{1}{\epsilon}, j+1)$ 时, x 的邻域 $B_\epsilon(x)$ 与 V_k 不相交, 即 $B_\epsilon(x)$ 最多与 $\mathcal{V}$ 中有限个 V_k 相交.

参考文献

[1] 陈文山. 非线性泛函分析. 甘肃人民出版社, 1982

[2] 郭大钧. 非线性泛函分析. 山东科学技术出版社, 1985

[3] 张恭庆. 临界点理论及其应用. 上海科学技术出版社, 1986

[4] 陈亚浙, 吴兰成. 二阶椭圆型方程与椭圆型方程组. 科学出版社, 1991

[5] 陆文端. Soblev 空间及其嵌入定理的推广. 数学学报, 16, 1966, 1~24

[6] 陆文端. 关于各向异性索波列夫空间的嵌入定理. 四川大学学报, 4,1979, 11~27

[7] 陆文端. 一类二阶拟线性椭圆方程的 Dirichlet 问题. 四川大学学报, 1, 1986, 28~39

[8] 朱熹平. 临界增长拟线性椭圆型方程的非平凡解. 中国科学, *A* 辑, 3, 1988, 225~237

[9] Adams R. A. Soblev Spaces. Academic Press, New York, 1975(中译本: 叶其孝等译, 索伯列夫空间, 人民教育出版社, 1981)

[10] Ash R. B. Measure, Integration, and Functional Analysis. Academic Press, New York and London, 1972

[11] Chow S. N.(周修义), Hale J. K. Methods of Bifurcation Theory. Springer-Verlag, New York, 1982

[12] Gilbarg D., Trudinger N. S.. Elliptic Partial Differential Equations of Second Order. Springer-Verlag, Berlin, 1977 (中译本: 叶其孝等译, 二阶椭圆型偏微分方程. 上海科学技术出版社, 1981), 2nd ed, 1983

[13] Munroe M. E.. Measure and Integration, 2nd ed. Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1971

[14] Rabinowitz P. H.. Minimax Methods in Critical Point Theory with Application to Differential Equations. Amer. Math. Soc., 1986

[15] Strang G., Fix G. J.. An Analysis of the Finite Element Method. Prentice-Hall, Inc., 1973

[16] Taylor A. E., Lay D. C.. Introduction to Functional Analysis, 2nd ed.. John Wiley & Sons, New York, 1980

[17] Yosida K.. Functional Analysis. Springer-Verlag, 1978(中译本: 吴元恺等译, 泛函分析, 人民教育出版社, 1980)

[18] Vainberg M. M.. *Variational Method for the Study of Nonlinear Operators.* Holden-Day, Inc., San Francisco,1964

[19] 拉迪任斯卡娅 O. A., 乌拉利采娃 H.H.. 线性和拟线性椭圆型方程. 科学出版社, 1987

[20] 米赫林 S.G.. 数学物理中的直接方法. 高等数学出版社, 1957

[21] Mihlin S. G.. Variational Methods in Mathematical Physics. State Publishing House for Technical Literature, 1957

[22] 索伯列夫 S. L.. 泛函分析在数学物理中的应用. 科学出版社, 1959

[23] Sobolev S.L.. On a Theorem of Functional Analysis. Matem. sb.,4:3,1938, 471~497

[24] Kondrasov V.I. On Certain Properties of Functions of the Space L^p, Dokl. Akad. Nauk SSSR, 48,1945,535~538

[25] Lu Wenduan (陆文端). On Imbedding Theorems of Spaces of Functions with Partial Dirivativs Summable with Different Powers. Vestnik Leningrad State University, 7, 1961, 23~37

[26] Pohozaev S.P.. Eigenfunctions of the Equation $\Delta u + \lambda f(u) = 0$. Dokl. Akad. Nauk SSSR,165:1,1965,36~39

[27] Ambrositti A., Rabinowitz P. H.. Dual variational methods in critical point theory and applications. J. Funct. Anal., 14, 1973, 349~381

[28] Azonrero J. P. G., Alonso I. P., Existence and nonuniquess for the $p-$ Laplacian: nonlinear eigenvalues, Comm. in Partial Diff. Eqns., 12:12, 1987, 1389~1430

[29] Brezis H., Lieb E., A relation between pointwise convergence of functions and convergence of functionals, Proc. Amer. Math. Soc., 88:3, 486~490, 1983

[30] Brezis H., Nirenberg L. Positive solutions of nonlinear elliptic equations ivolving critical Sobolev exponents. Comm. Pure Appl. Math., 36, 437~477, 1983

[31] Courant R.. Variational methods for solution of problems of equilibrium and vibrations. Bull. Amer. Math. Soc., 49, 1~23, 1943

[32] Gagliardo E., Proprieta di alcume classi funcziono in piu variabili, Ricerche di mat., 7:1, 102~137, 1958

[33] Lions P. L.. The concentration-compactness principle in the calculus of variations. The limit case, Part 1, Rev. Matematica Iberoamericana, 1:1,145~201,1985

[34] Morrey C.B., Functions of several variables and abosolute continuity, II, Duke J. Math., 6, 187~215, 1940

[35] Riesz M.. Sur les ensembles compacts de fonctions sommables. Acta Sci. Math. Szeged, 6, 136~142, 1933

[36] Talenti G.. Best constants in Sobolev inequality, Annali di Mat., 110, 353~372, 1976

[37] Struwe M. Variational Methods: Applications to Nonlinear Partial Differential Equations and Hamiltonian Systems,Second Edition,Springer-Verlag, 1966